Annales du CAPES interne de Mathématiques 2009 à 2011

Dany-Jack Mercier

Table des matières

Avant-propos

Voici la compilation des trois problèmes du CAPES interne 2009, 2010 et 2011, proposée avec leurs corrections détaillées.

Ces problèmes, très variés, permettront de s'entraîner en analyse, en géométrie et en probabilités. Ils sont à exploiter pour n'importe quelle préparation à un concours de recrutement de l'Education Nationale, que ce soit au CAPES interne, au CAPES externe, au CAPLP, au CAPES agricole ou même à l'agrégation.

Le but d'une préparation à l'écrit est d'apprendre à réagir sur sa copie de façon efficace et circonstanciée, compte tenu des conditions propres à toute épreuve d'admissibilité : documents personnels interdits et temps limité. C'est en s'entraînant sur une multitude de problèmes de concours que l'on forge des armes sûres. C'est en lisant une solution *détaillée* que l'on apprend de nouvelles méthodes et que l'on vérifie sa rédaction. On retiendra qu'un "travail lourd" sur des annales corrigées est toujours bénéfique.

Variés, complets et motivants, ces problèmes le sont indubitablement comme on peut facilement le vérifier :

- Le premier problème de la session 2009 propose trois preuves différentes de l'admirable théorème de Frank Morley découvert en 1898, suivant lequel dans un triangle non aplati, trois points choisis parmi les points d'intersection des trisectrices issues des sommets du triangle forment un triangle équilatéral. On trouvera une solution géométrique utilisant des angles, une solution géométrique utilisant la formule des sinus et des relations trigonométriques, et une dernière solution qui fait intervenir les nombres complexes et des transformations bien choisies.

- Le second problème proposé en 2009 nous fait travailler l'interpolation polynomiale et la méthode des différences finies de Newton. On obtient un joli problème d'analyse où l'on a l'occasion d'exploiter ses connaissances et de s'entraîner à rédiger des réponses rigoureuses en temps limité.

[0] [annalescapesinterne2009a11] v1.00

- La cuvée 2010 nous offre un premier problème qui s'intéresse à l'inégalité des accroissements finis et à l'étude d'une fonction gaussienne. Le problème est très abordable, et sera l'occasion de s'entraîner à réagir rapidement et à produire une rédaction rentable pour avancer autant qu'on le peut en temps limité. De ce point de vue, le problème est efficace pour un entraînement. Il propose aussi de calculer une intégrale gaussienne de plusieurs manières attrayantes : en utilisant la loi normale centrée réduite, en approximant une somme d'aires par des rectangles, ou en utilisant des trapèzes.

- Toujours en 2010, le second problème touche à la géométrie plane et constitue une invitation à montrer que, parmi tous les polygones convexes à n côtés, le polygone régulier est celui qui possède la plus grande aire. Ce problème est l'occasion de réviser de nombreux fondamentaux de géométrie, comme le *théorème d'Al Kashi* ou *la formule de Héron*, et d'introduire la classe des *triangles super-semblables*, pour s'achever sur la preuve et l'exploitation d'un résultat du mathématicien et astronome grec Zénodore (IIe siècle av. J.-C.).

- Et nous arrivons au long problème de probabilité proposé en 2011, qui s'intéresse à des lancers de pièces et à la probabilité d'apparition de trois PILE ou de trois FACE consécutivement sur une série de n lancers, à celle de l'apparition d'un "double PILE" au rang n, ou encore à la probabilité pour que la première apparition d'un "double PILE" soit réalisée au rang n. Ce problème est l'occasion de réviser les *suites de Fibonacci*, de répondre à des questions concernant l'utilisation d'un tableur, d'exploiter l'*inégalité de Bienaymé-Tchebychev*, de proposer des algorithmes, de faire un peu de calcul sur machine, et de travailler avec des matrices et des polynômes. Que du bonheur ! Voilà un problème complet et varié sur le thème des probabilités sur lequel on pourra "faire ses dents".

Il s'agit maintenant de jouer avec ces problèmes...

D.-J. Mercier
Pointe-à-Pitre, ce 23 février 2011.

Chapitre 1

CAPES interne 2009

1.1 Énoncé

PROBLEME 1 : LE THEOREME DE MORLEY

C'est un théorème qui permet de fabriquer de la symétrie à partir de rien. Il a été démontré par Frank Morley en 1898, et on peut l'énoncer comme ceci : « Dans un triangle non plat, trois points pris parmi les points d'intersection des trisectrices issues des sommets du triangle forment un triangle équilatéral ».

Ce problème en propose trois démonstrations différentes. Les trois parties sont indépendantes et les résultats de l'une ne peuvent donc pas être utilisés dans l'autre.

Notations — On travaille dans le plan affine euclidien. Si O, A et B sont trois points du plan (avec $A \neq O$ et $B \neq O$), on note $\widehat{AOB}$ (ou $\widehat{BOA}$, ou même $\widehat{O}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'angle géométrique saillant (mesuré dans $[0;\pi]$) délimité par les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$.
Par abus de notation, on note encore $\widehat{AOB}$ la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$.
Soit d une droite du plan passant par O, on dira que d est une trisectrice de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ si et seulement s'il existe un point M de d, distinct de O, tel que

$$\widehat{AOM} = \frac{1}{3}\widehat{AOB} \quad \text{ou} \quad \widehat{AOM} = \frac{2}{3}\widehat{AOB}$$

(de sorte que tout angle géométrique de mesure non nulle admet exactement deux trisectrices).
La distance entre deux points A et B est notée AB.

[0] [ag76e] v1.01

PARTIE A : Première démonstration

I. Préliminaires

Soit ABC un triangle non plat.

1. Construire à la règle et au compas le centre du cercle inscrit au triangle ABC, noté I. On laissera apparentes toutes les lignes de construction.

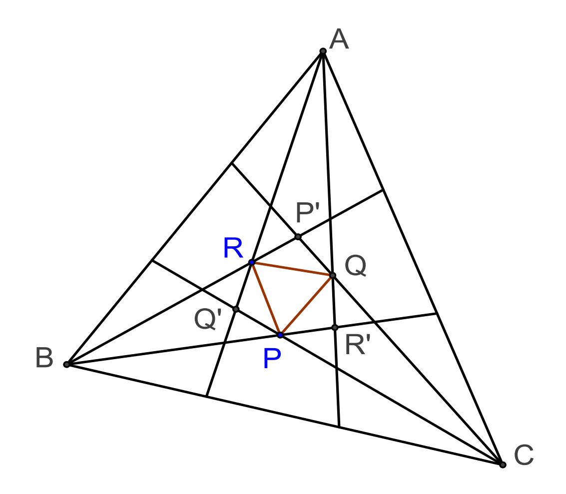
2. Prouver l'égalité : $\widehat{BIC} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

3. On note A_1 le point d'intersection de la bissectrice intérieure du triangle ABC issue du sommet A avec le segment $[BC]$. Prouver que si J est un point intérieur au triangle ABC, situé sur la bissectrice issue de A (c'est-à-dire un point du segment $[AA_1]$) vérifiant l'égalité $\widehat{BJC} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{A}}{2}$ alors le point J est confondu avec le point I.

II. Construction auxiliaire

Soit PQR un triangle équilatéral et soient u, v, w trois nombres réels de l'intervalle $]0; \pi/3[$ tels que $u + v + w = \frac{2\pi}{3}$. On construit sur les côtés du triangle PQR, et à l'extérieur de ce triangle, trois triangles :

- $P'QR$ isocèle en P' et dont les angles à la base ont pour mesure u,
- $PQ'R$ isocèle en Q'et dont les angles à la base ont pour mesure v,
- PQR' isocèle en R' et dont les angles à la base ont pour mesure w.



1.1. Calculer $\widehat{Q'RQ} + \widehat{R'QR}$ en fonction de u.

1.2 Montrer que les droites (QR') et $(Q'R)$ sont sécantes. On notera A leur point d'intersection. On notera de même B le point d'intersection des droites (RP') et $(R'P)$ et C le point d'intersection des droites (PQ') et $(P'Q)$.
Dans la suite de la partie A on pourra se fier au schéma ci-dessus en ce qui concerne les positions relatives des différents points sur une droite donnée, ou les positions relatives des droites considérées, sans chercher à les justifier.

1.3. Montrer que $\widehat{Q'PB} = u$. En déduire la valeur de $\widehat{CPR'}$. *De même, on montre que $\widehat{R'QC} = v$ et $\widehat{P'RA} = w$ et on en déduit la valeur de $\widehat{AQP'}$ et de $\widehat{BRQ'}$.*

2.1. Montrer que la droite (PP') est une des médiatrices du triangle $P'RQ$.

2.2. En déduire que (PP') est une bissectrice du triangle $BP'C$.

3.1. Écrire $\widehat{BPC}$ et $\widehat{BP'C}$ en fonction de u.

3.2. Montrer que $\widehat{BPC} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\widehat{BP'C}}{2}$.

4. Montrer que P appartient aux bissectrices des angles $\widehat{P'BC}$ et $\widehat{P'CB}$. *De même, on montre que Q appartient aux bissectrices des angles $\widehat{Q'CA}$ et $\widehat{Q'AC}$, et que R appartient aux bissectrices des angles $\widehat{R'AB}$ et $\widehat{R'BA}$.*

5. Dresser, en la justifiant, la liste des six trisectrices du triangle ABC.

6. Donner les mesures des angles $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ en fonction de u, v, w.

III. Démonstration du théorème

Soient $A_1B_1C_1$ un triangle non plat et u, v, w les réels définis par les relations suivantes : $\widehat{A_1} = \pi - 3u$, $\widehat{B_1} = \pi - 3v$, $\widehat{C_1} = \pi - 3w$.

1. Calculer $u + v + w$.

2. Soit PQR un triangle équilatéral quelconque. La construction de la question II, à partir du triangle PQR et des valeurs de u, v et w ici définies, aboutit à un triangle ABC. Justifier que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.

3. Démontrer le théorème de Morley.

PARTIE B : Deuxième démonstration

I. La relation des sinus

Soit ABC un triangle non plat, O le centre de son cercle circonscrit et r le rayon de son cercle circonscrit. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

1. Montrer que $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = 2r$.

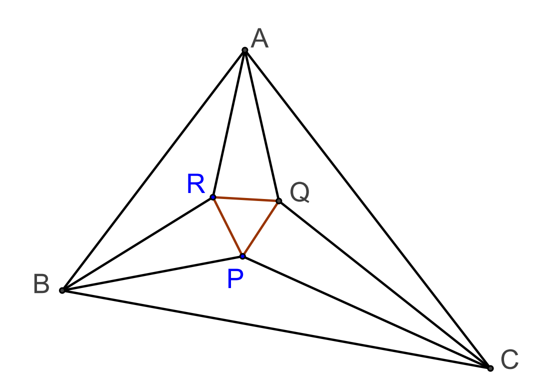
(On distinguera les cas $\widehat{A} < \pi/2$, $\widehat{A} = \pi/2$ et $\widehat{A} > \pi/2$.)

2. En déduire la relation dite des sinus :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2r.$$

II. Démonstration du théorème de Morley

Soit ABC un triangle non plat quelconque. On note P, Q, R les points d'intersection des trisectrices issues respectivement des sommets B et C, C et A, A et B, tels que définis par la figure ci-dessous. Soient α, β, γ les réels définis par $\widehat{A} = 3\alpha$, $\widehat{B} = 3\beta$, $\widehat{C} = 3\gamma$.



Dans la suite de la partie B on pourra se fier au schéma ci-dessus en ce qui concerne les positions relatives des différents points sur une droite donnée, ou les positions relatives des droites considérées, sans chercher à les justifier.

1. En appliquant la relation des sinus aux triangles ABR et ABC, montrer que :

$$AR = 2r \sin\beta \,\frac{\sin(3\alpha + 3\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

2. Montrer que, pour tout nombre réel θ, on a la relation suivante :

$$\sin 3\theta = \sin\theta(4\cos^2\theta - 1).$$

On rappelle que, pour tout couple de réels (p, q), on a la relation suivante :

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\frac{p+q}{2} \sin\frac{p-q}{2}.$$

3. Montrer que : $$4 \sin\gamma \,\sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) = \frac{\sin(3\alpha + 3\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

4. Montrer que : $AR = 8r\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right).$

5. En déduire que : $AQ = 8r\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)$

et que : $$\frac{AR}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)} = \frac{AQ}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)} = 8r\sin\beta\sin\gamma.$$

6. On considère le point M de la demi-droite $[AQ)$ vérifiant $\widehat{ARM} = \frac{\pi}{3}+\beta$.

6.1. Calculer $\widehat{AMR}$.

6.2. En appliquant la relation des sinus dans le triangle ARM, montrer que $AM = AQ$.

6.3. Montrer que les points M et Q sont confondus.

6.4. Prouver les égalités suivantes :

$$\widehat{ARQ} = \frac{\pi}{3}+\beta \quad \text{et} \quad \widehat{AQR} = \frac{\pi}{3}+\gamma.$$

7. Montrer que $RQ = 8r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

8. Conclure.

PARTIE C : Troisième démonstration

La démonstration qui suit est basée sur un article d'Alain Connes datant de 1998 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques).
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. Chaque point $M(x,y)$ du plan est aussi repéré par son affixe, c'est-à-dire le nombre complexe $z = x+iy$. Les angles de vecteurs sont orientés. On appelle mesure principale d'un angle de deux vecteurs non nuls, celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.
Le complexe égal à $\exp(2i\pi/3)$ est noté j.

I. Préliminaires

1. Résoudre l'équation $z^3 - 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

2. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

3. On considère trois points P, Q, R du plan complexe d'affixes respectifs p, q, r. Prouver que le triangle PQR est équilatéral, avec l'angle orienté $(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})$ de mesure principale égale à $\pi/3$, si et seulement si $p+jq+j^2r = 0$.
Dans ce cas, on dit que le triangle PQR est un triangle équilatéral direct.

4. Montrer que le triangle PQR est équilatéral, avec l'angle orienté $(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})$ de mesure principale égale à $-\pi/3$, si et seulement si $p+j^2q+jr = 0$.
Dans ce cas, on dit que le triangle PQR est un triangle équilatéral indirect.

II. Généralités

On considère un triangle non plat ABC que l'on suppose direct c'est-à-dire tel que la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit comprise strictement entre 0 et π.
On note 3α, 3β et 3γ les mesures principales respectives des angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$; elles appartiennent donc toutes à l'intervalle $]0\,;\pi]$.
On note P, Q, R les points d'intersection des trisectrices issues respectivement des sommets adjacents B et C, C et A, A et B, tels que définis par la figure ci-dessous.
On note P', Q' et R' les symétriques des points P, Q, R respectivement par

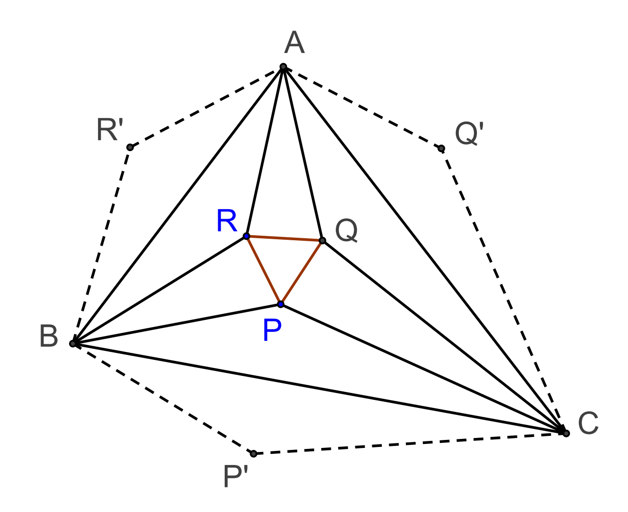


FIG. 1.1 –

rapport aux droites (BC), (AC) et (AB), et A' le symétrique de A par rapport à la droite (BC).
On rappelle qu'une rotation de centre Ω et d'angle θ ($\theta \in]0\,;2\pi[$) est une similitude directe de centre Ω, de rapport 1 et d'angle θ.
On appelle f la rotation de centre A et d'angle 2α, g la rotation de centre B et d'angle 2β et h la rotation de centre C et d'angle 2γ.

1. Calculer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP'})$.

2. Montrer que P est un point fixe de la transformation $g \circ h$, R un point fixe de la transformation $f \circ g$ et Q un point fixe de la transformation $h \circ f$.

III. Quelques calculs numériques

Soit M un point du plan d'affixe z et φ une transformation du plan. Par abus

de langage on note encore $\varphi(z)$ l'affixe du point $\varphi(M)$.

1. Justifier l'existence de six nombres complexes a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 tels que, pour tout nombre complexe z : $f(z) = a_1 z + b_1$, $g(z) = a_2 z + b_2$ et $h(z) = a_3 z + b_3$.

2. Prouver que ces nombres complexes vérifient les propriétés suivantes :

$$a_1 a_2 a_3 = j, \quad a_1 a_2 \neq 1, \quad a_2 a_3 \neq 1 \quad \text{et} \quad a_3 a_1 \neq 1.$$

3. Prouver que les nombres p, q et r vérifient les égalités suivantes :

$$p = \frac{a_2 b_3 + b_2}{1 - a_2 a_3}, \quad q = \frac{a_3 b_1 + b_3}{1 - a_3 a_1} \quad \text{et} \quad r = \frac{a_1 b_2 + b_1}{1 - a_1 a_2}.$$

4. *Un calcul (un peu lourd, mais faisable à la main) donne alors les deux résultats qui suivent.*

♦ D'une part, pour tout nombre complexe z, on a :

$$(f^3 \circ g^3 \circ h^3)(z) = (a_1 a_2 a_3)^3 z + (a_1^2 + a_1 + 1) b_1 + a_1^3 (a_2^2 + a_2 + 1) b_2 + a_1^3 a_2^3 (a_3^2 + a_3 + 1) b_3.$$

♦ D'autre part, en tenant compte du fait que $a_1 a_2 a_3 = j$, on a :

$$p + jq + j^2 r = -j^2 \frac{a_3 \left[(a_1^2 + a_1 + 1) b_1 + a_1^3 (a_2^2 + a_2 + 1) b_2 + a_1^3 a_2^3 (a_3^2 + a_3 + 1) b_3\right]}{a_1 (1 - a_2 a_3)(1 - a_3 a_1)(1 - a_1 a_2)}.$$

On admet ces deux résultats.

4.1. Prouver que $f^3 \circ g^3 \circ h^3$ est une translation notée τ.

4.2. Déterminer géométriquement l'image du point A par la translation τ. En déduire que $f^3 \circ g^3 \circ h^3$ est égale à l'application identité.

4.3. Démontrer le théorème de Morley dans le cas d'un triangle ABC direct puis dans le cas d'un triangle ABC indirect.

PROBLEME 2 : INTERPOLATION POLYNOMIALE, METHODE DES DIFFERENCES FINIES

La Partie I est indépendante des parties suivantes. En revanche les parties II, III et IV sont liées.

Partie I : Approximation d'une fonction sur un intervalle

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

1. Etude de la fonction f

1.1. Etudier la fonction f et dresser son tableau de variations.

1.2. Tracer la courbe représentative de la fonction f avec une unité graphique de 4 cm.

2. Une première approximation

2.1. Déterminer la fonction polynomiale R de degré 1 vérifiant : $R(1) = 1/2$ et $R(0) = 1$.

2.2. Déterminer la fonction polynomiale Q de degré 1 vérifiant : $Q(-1) = 1/2$ et $Q(0) = 1$.

2.3. On note g la fonction affine par morceaux, définie sur l'intervalle $[-1;1]$ par :

- ♦ pour tout réel x de l'intervalle $[-1;0]$, $g(x) = Q(x)$;
- ♦ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, $g(x) = R(x)$.

Tracer la courbe représentative de la fonction g sur le même graphique que précédemment.

2.4. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-1;1]$, on a : $g(x) \leq f(x)$.

2.5. Calculer l'intégrale $I_g = \int_{-1}^{1} g\,(x)\;dx$ et en déduire une minoration de l'intégrale $I_f = \int_{-1}^{1} f\,(x)\;dx$.

3. Interpolation quadratique

Dans cette partie on cherche à approcher la fonction f par une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

3.1. Montrer que, s'il existe une fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à 2 qui vérifie les relations suivantes :

$$P(-1) = f\,(-1)\,, \quad P(0) = f(0), \quad P(1) = f\,(1)\,,$$

alors elle est unique.

3.2. On considère les fonctions polynomiales L_{-1}, L_0 et L_1 définies pour tout réel x par :

$$L_{-1}\,(x) = \frac{1}{2}x\,(x-1)\,, \quad L_0\,(x) = -\,(x-1)\,(x+1)\,, \quad L_1\,(x) = \frac{1}{2}x\,(x+1)\,.$$

Calculer pour tout entier i de $\{-1, 0, 1\}$ et pour tout entier j de $\{-1, 0, 1\}$ le réel $L_i\,(j)$.

3.3. On note P la fonction polynomiale définie pour tout nombre réel x par :

$$P\,(x) = f\,(-1)\,L_{-1}\,(x) + f\,(0)\,L_0\,(x) + f\,(1)\,L_1\,(x)\,.$$

Prouver, sans expliciter la fonction P, que c'est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant les relations suivantes :

$$P(-1) = f(-1), \quad P(0) = f(0), \quad P(1) = f(1).$$

3.4. Quel résultat peut-on énoncer à l'aide des questions 3.1. et 3.3.

3.5. Expliciter la fonction P et prouver que pour tout réel x de l'intervalle $[-1\,;1]$ on a : $f(x) \leq P(x)$.

3.6. Tracer, toujours sur le même graphique que précédemment, la courbe représentative de la fonction P.

3.7. Donner une majoration de l'intégrale $I_f = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

3.8. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de l'intégrale $I_f = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

4. Soient y_0, y_1, y_2 trois nombres réels fixés. On considère les fonctions polynomiales L_0, L_1 et L_2 définies de la façon suivante : pour chaque entier i compris entre 0 et 2 et pour tout nombre réel x,

$$L_i(x) = \prod_{j=0;\ j\neq i}^{2} \frac{x-j}{i-j}.$$

En appliquant une méthode analogue à celle mise en œuvre à la question 3, prouver qu'il existe une unique fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à 2 telle que, pour tout entier i de $\{0,1,2\}$, $P(i) = y_i$.

Partie II : Méthode de Newton

Soient (y_0, y_1, y_2, y_3) quatre nombres réels fixés. Dans cette partie, on se propose de déterminer quatre fonctions polynomiales P_0, P_1, P_2, P_3 telles que :

- ♦ P_0 est constante et vérifie : $P_0(0) = y_0$.
- ♦ P_1 est de degré inférieur ou égal à 1, $P_1(0) = y_0$ et $P_1(1) = y_1$.
- ♦ P_2 est de degré inférieur ou égal à 2, $P_2(0) = y_0$, $P_2(1) = y_1$ et $P_2(2) = y_2$.
- ♦ P_3 est de degré inférieur ou égal à 3, $P_3(0) = y_0$, $P_3(1) = y_1$, $P_3(2) = y_2$ et $P_3(3) = y_3$.

Pour tout entier n de $\{0,1,2,3\}$, si la fonction P_n vérifie les propriétés correspondantes ci-dessus, on dira qu'elle vérifie la propriété $(\mathcal{E}_n)$.
On introduit maintenant les notations suivantes :

$\Delta^0 y_0 = y_0$			
	$\Delta^1 y_0 = y_1 - y_0$		
$\Delta^0 y_1 = y_1$		$\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0$	
	$\Delta^1 y_1 = y_2 - y_1$		$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
$\Delta^0 y_2 = y_2$		$\Delta^2 y_1 = \Delta^1 y_2 - \Delta^1 y_1$	
	$\Delta^1 y_2 = y_3 - y_2$		
$\Delta^0 y_3 = y_3$			

1. Premiers résultats

1.1. Expliciter l'unique fonction polynomiale P_0 vérifiant la propriété $(\mathcal{E}_0)$.

1.2. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale P_1 vérifiant la propriété $(\mathcal{E}_1)$ et qu'elle peut s'exprimer sous la forme suivante, pour tout réel x :

$$P_1(x) = \Delta^0 y_0 + \left(\Delta^1 y_0\right) x.$$

1.3. Calculer $\Delta^2 y_0$ et $\Delta^3 y_0$.

2. **Détermination de la fonction P_2**

On suppose jusqu'à la fin de la question (II.3) que P_2 est l'unique fonction polynomiale vérifiant la propriété $(\mathcal{E}_2)$, et on note Q_2 la fonction polynomiale définie pour tout réel x par :

$$Q_2(x) = P_2(x) - P_1(x).$$

2.1. Que peut-on dire du degré de Q_2 ?

2.2. Calculer $Q_2(0)$ et $Q_2(1)$. En déduire qu'il existe un réel c_2 tel que $Q_2(x) = c_2 x (x-1)$.

2.3. Montrer que ce réel c_2 est égal à $\Delta^2 y_0/2$.

2.4. Montrer que la fonction polynomiale P_2 vérifiant la propriété $(\mathcal{E}_2)$ peut s'exprimer sous la forme suivante, pour tout réel x :

$$P_2(x) = \Delta^0 y_0 + \left(\Delta^1 y_0\right) x + \Delta^2 y_0 \frac{x(x-1)}{2}.$$

3. Détermination de la fonction P_3

En s'inspirant de la méthode précédente, justifier qu'il existe une fonction polynomiale P_3 vérifiant la propriété $(\mathcal{E}_3)$ et qu'elle peut s'exprimer sous la forme suivante, pour tout réel x :

$$P_3(x) = \Delta^0 y_0 + \left(\Delta^1 y_0\right) x + \left(\Delta^2 y_0\right) \frac{x(x-1)}{2} + \left(\Delta^3 y_0\right) \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}.$$

On admet que cette fonction P_3 est l'unique fonction polynomiale vérifiant la propriété $(\mathcal{E}_3)$.

Plus généralement, on peut prouver le théorème suivant, établi pour $n = 3$ à la question précédente et admis dans la suite de ce problème.
Soit n un entier naturel strictement positif $(n > 0)$ et $(y_0, y_1, y_2, ..., y_n)$ $n+1$ nombres réels. Il existe une unique fonction polynomiale P_n de degré inférieur ou égal à n vérifiant la propriété suivante : pour tout entier naturel $k \leq n$,

$P_n(k) = y_k$, et cette fonction peut s'exprimer sous la forme suivante, pour tout réel x :

$$P_n(x) = \Delta^0 y_0 + \left(\Delta^1 y_0\right) x + (\Delta^2 y_0)\frac{x(x-1)}{2} + ... + (\Delta^n y_0)\frac{x(x-1)(x-n+1)}{n!},$$

où la notation $\Delta^k y_0$ est définie par la relation de récurrence suivante :

♦ *pour tout entier naturel $j \leq n$, $\Delta^0 y_j = y_j$ et*

♦ *pour tout entier naturel non nul $k \leq n$ et pour tout entier naturel $j \leq n-k$, $\Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j$.*

Partie III : Résolution d'une équation aux différences finies

Soit Q une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3 et α un réel. Le but de cette partie est de montrer l'existence et l'unicité d'une fonction polynomiale P telle que $P(0) = \alpha$ et pour tout nombre réel x,

$$P(x+1) - P(x) = Q(x).$$

On dira d'une telle fonction P qu'elle vérifie la propriété $(C_{Q,\alpha})$.
On rappelle qu'une fonction polynomiale de degré n (n entier ≥ 0) qui admet $n+1$ racines distinctes est nulle. On définit les fonctions polynomiales suivantes, pour tout réel x, par :

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x, \quad H_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}, \quad H_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$$

$$\text{et } H_4(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}.$$

1. Question préliminaire : cas particulier de la fonction nulle et unicité

1.1. Montrer pour tout réel α l'existence et l'unicité d'une fonction polynomiale P vérifiant la propriété $(C_{Q,\alpha})$ dans le cas où Q est la fonction nulle.

1.2. Montrer que s'il existe une fonction polynomiale P vérifiant la propriété $(C_{Q,\alpha})$, alors elle est unique.

2. Cas général : analyse du problème

Soit Q une fonction polynomiale non nulle, de degré inférieur ou égal à 3, et α un réel. On suppose dans cette partie l'existence d'une fonction polynomiale P vérifiant la propriété $(C_{Q,\alpha})$.

2.1. Prouver que P n'est pas une fonction constante.

2.2. On note m le degré de la fonction polynomiale P.
Prouver que le degré de la fonction polynomiale Q vérifiant, pour tout réel x, l'égalité $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ est inférieur ou égal à $m-1$. En déduire que m est inférieur ou égal à 4.

2.3. Prouver que P peut s'exprimer de façon unique sous la forme suivante, pour tout réel x :

$$P(x) = a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x) + a_3 H_3(x) + a_4 H_4(x).$$

On ne demande pas l'expression des coefficients a_k.

2.4. Calculer a_0.

2.5. Vérifier que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 4$, on a pour tout réel x :

$$H_k(x+1) - H_k(x) = H_{k-1}(x).$$

2.6. En déduire une expression de $Q(x)$ en fonction des a_k et des $H_k(x)$.

3. Synthèse

Soit Q une fonction polynomiale non nulle de degré inférieur ou égal à 3 et α un réel. On note, pour tout entier naturel $j \leq 3$, $y_j = Q(j)$.

3.1. Justifier qu'il existe une fonction polynomiale P vérifiant la propriété $(C_{Q,\alpha})$ et que cette fonction peut s'exprimer sous la forme suivante pour tout réel x :

$$P(x) = \alpha + (\Delta^0 y_0) H_1(x) + (\Delta^1 y_0) H_2(x) + (\Delta^2 y_0) H_3(x) + (\Delta^3 y_0) H_4(x).$$

3.2. En déduire qu'il existe une unique fonction polynomiale P vérifiant la propriété $(C_{Q,\alpha})$.

Partie IV : Somme des puissances $3^{\text{èmes}}$ des k premiers entiers

Le but de cette partie est de donner une formule, donnant pour tout entier naturel non nul k, la somme : $\sigma_k = 1^3 + 2^3 + ... + k^3$ (avec par convention $\sigma_0 = 0$).
Précisément on pose $\sigma_0 = 0$ et, pour tout entier naturel k, $\sigma_{k+1} = \sigma_k + (k+1)^3$, ce qui est une définition par récurrence de la suite $(\sigma_k)_{k \geq 0}$.
On note Q la fonction polynomiale définie par $Q(x) = (x+1)^3$, et pour tout entier naturel $j \leq 3$, on note $y_j = Q(j)$. On note P la fonction polynomiale qui vérifie : $P(0) = 0$ et, pour tout réel x, $P(x+1) - P(x) = Q(x)$.

1. Montrer que pour tout entier naturel k non nul, on a $\sigma_k = P(k)$.
2. En déduire une expression de σ_k utilisant la notation $\Delta^k y_0$.
3. Calculer $\Delta^k y_0$ pour tout entier k compris entre 0 et 3.
4. Donner une expression simple de la somme σ_k en détaillant les calculs.

1.2 Corrigé

PROBLEME 1 : LE THEOREME DE MORLEY

A.I.1. Le point I est à l'intersection des bissectrices intérieures du triangle ABC, et ces bissectrices sont faciles à construire : voir FIG. 1.2.

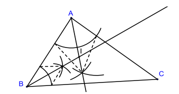


FIG. 1.2 – Construction de I

A.I.2. Avec les notations de la FIG. 1.3, on a

$$\widehat{BIC} = \pi - (b+c) \quad \text{et} \quad \widehat{A} = \pi - 2(b+c)$$

d'où $\widehat{A} = \pi - 2(\pi - \widehat{BIC}) = 2\widehat{BIC} - \pi$, soit $\widehat{BIC} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

A.I.3. On se reporte à la FIG. 1.4. On note $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$ l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, que l'on identifie à une mesure de l'angle orienté obtenue pour une orientation du plan choisie une fois pour toute. L'ensemble

$$\mathcal{C} = \{M \,/\, (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \widehat{BIC} \ \ (\pi)\}$$

est un cercle passant par B et C (le modulo π signifie que l'on s'intéresse à des angles orientés de droites). I et J appartiennent à $\mathcal{C}$ puisque

$$\widehat{BJC} = \widehat{BIC} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{A}}{2},$$

donc I et J appartiennent à $(AA_1) \cap \mathcal{C}$. Comme I et J sont tous les deux à l'intérieur du triangle ABC, ils appartiennent tous les deux au demi-plan $\mathcal{P}_A$

[0] [ag76] v1.00

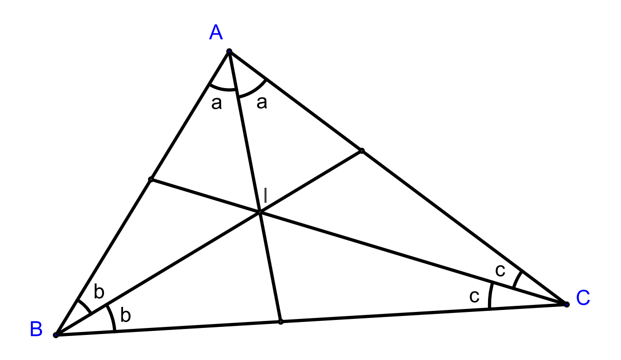


FIG. 1.3 – Calcul de $\widehat{BIC}$

de frontière (BC) contenant A, et comme $(AA_1)\cap\mathcal{C}\cap\mathcal{P}_A$ est un singleton, on aura $I = J$.

Remarque : Pour vérifier que $(AA_1)\cap\mathcal{C}\cap\mathcal{P}_A$ est un singleton, on peut commencer par voir que A_1 appartient à $]BC[$ où $B, C \in \mathcal{C}$, de sorte que A_1 soit à l'intérieur du disque fermé $\mathcal{D}$ de frontière $\mathcal{C}$. La droite (AA_1) coupe alors $\mathcal{D}$ suivant un segment $[II']$ (intersection du convexe fermé (AA_1) et du convexe compact $\mathcal{D}$) qui contient strictement A_1 avec $I \in \mathcal{P}_A$ et $I' \notin \mathcal{P}_A$. Par suite $(AA_1)\cap\mathcal{C}\cap\mathcal{P}_A = \{I\}$.

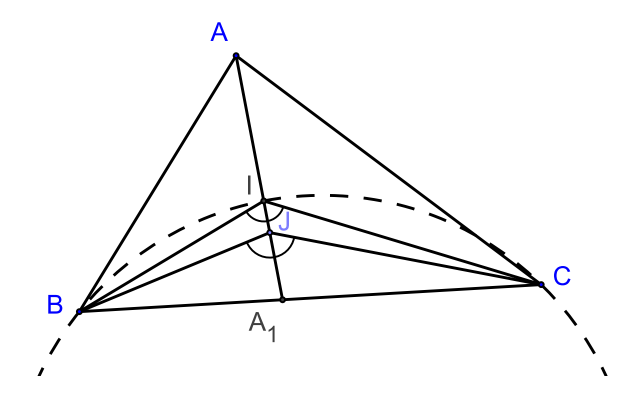


FIG. 1.4 – Montrer que $I = J$

A.II.1.1.

$$\begin{aligned}\widehat{Q'RQ}+\widehat{R'QR} &= \left(v+\frac{\pi}{3}\right)+\left(w+\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{2\pi}{3}+v+w\\ &= \frac{2\pi}{3}+\left(\frac{2\pi}{3}-u\right)=\frac{4\pi}{3}-u.\end{aligned}$$

Remarque : Comme $0 < u < \pi/3$, on aura $4\pi/3 - u > \pi$, donc la somme de ces deux angles est un angle rentrant.

A.II.1.2. Orientons le plan de sorte que PQR soit un triangle direct. Avec des mesures d'angles orientés de vecteurs, on peut relire la solution de la question précédente et obtenir encore :

$$(\overrightarrow{RQ'},\overrightarrow{RQ})+(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QR'})=\left(v+\frac{\pi}{3}\right)+\left(w+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}-u\ \ (2\pi)\,.$$

Si les droites (QR') et $(Q'R)$ étaient parallèles, on aurait $(\overrightarrow{RQ'},\overrightarrow{QR'})=0\ \ (\pi)$. En utilisant la relation de Chasles, on obtiendrait

$$0=(\overrightarrow{RQ'},\overrightarrow{QR'})=(\overrightarrow{RQ'},\overrightarrow{RQ})+(\overrightarrow{RQ},\overrightarrow{QR})+(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QR'})=\frac{\pi}{3}-u\ \ (\pi)$$

d'où $u=\pi/3\ \ (\pi)$, ce qui est impossible puisque $0<u<\pi/3$.

Remarque : Si on veux rester avec des angles géométriques, on peut "lire" la position relative des points sur le dessin et par exemple traduire le parallélisme de (QR') et $(Q'R)$ par l'égalité des angles alternes-internes $\widehat{Q'RQ}$ et $\widehat{RQx}$ où $[Qx)$ désigne la demi-droite opposée à $[QR')$ (on ne peut pas écrire tout de suite $[Qx)=[QA)$ puisque A n'est pas encore défini). On a

$$\widehat{Q'RQ}=v+\frac{\pi}{3}\quad\text{et}\quad\widehat{RQx}=\pi-\widehat{R'QR}=\pi-\left(w+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}-w$$

d'où

$$\begin{aligned}(QR')\,//\,(Q'R) &\Leftrightarrow\ \widehat{Q'RQ}=\widehat{RQx}\\ &\Leftrightarrow\ v+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-w\\ &\Leftrightarrow\ v+w=\frac{\pi}{3}\\ &\Leftrightarrow\ \frac{2\pi}{3}-u=\frac{\pi}{3}\quad\Leftrightarrow\quad u=\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

On obtient encore $u=\pi/3$, ce qui est contraire aux hypothèses.

A.II.1.3. Les points B, P, R' sont alignés et P est situé entre B et R' (FIG. 1.5), donc

$$\widehat{BPQ'} + \widehat{Q'PR} + \widehat{RPQ'} + \widehat{QPR'} = \pi$$

$$\widehat{BPQ'} + v + \frac{\pi}{3} + w = \pi$$

$$\widehat{BPQ'} = \frac{2\pi}{3} - (v+w) = \frac{2\pi}{3} - \left(\frac{2\pi}{3} - u\right) = u.$$

Par ailleurs les angles $\widehat{Q'PB}$ et $\widehat{CPR'}$ sont égaux car opposés par le sommet. Donc

$$\widehat{Q'PB} = \widehat{CPR'} = u.$$

De la même manière

$$\begin{cases} \widehat{R'QC} = \widehat{AQP'} = v \\ \widehat{P'RA} = \widehat{BRQ'} = w. \end{cases}$$

A.II.2.1. $P'RQ$ est isocèle en P', et RPQ est isocèle en P, donc les points P et P' sont équidistants des extrémités du segment $[RQ]$, et (PP') est la médiatrice de $[RQ]$.

A.II.2.2. Dans le triangle isocèle $P'RQ$, la médiatrice (PP') de la base $[RQ]$ coïncide avec la bissectrice intérieure issue de P'. Comme on voit sur la figure que $R \in [P'B]$ et $Q \in [P'C]$, on en déduit que (PP') est aussi la bissectrice intérieure issue de P' du triangle $BP'C$.

A.II.3.1. Les valeurs des angles sont rappelées sur la FIG. 1.5. On a :

$$\widehat{BPC} = 2\pi - \left(u + v + \frac{\pi}{3} + w + u\right) = 2\pi - (\pi + u) = \pi - u$$

et $\widehat{BP'C} = \pi - 2u$ (en utilisant le triangle $RP'Q$).

A.II.3.2.
$$2\widehat{BPC} = 2\pi - 2u = 2\pi - (\pi - \widehat{BP'C})$$

donc
$$\widehat{BPC} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{BP'C}}{2}.$$

A.II.4. On a $\widehat{BPC} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{BP'C}}{2}$. Les préliminaires (A.I.3) montrent que P est le centre du cercle inscrit au triangle $BP'C$. P est donc le point de concours des bissectrices intérieures de ce triangle.

A.II.5. D'après la question précédente :

▷ P appartient à la bissectrice de $\widehat{P'BC}$ donc $\widehat{CBP} = \widehat{PBR}$,

▷ R appartient à la bissectrice de $\widehat{R'BA}$ donc $\widehat{PBR} = \widehat{RBA}$,

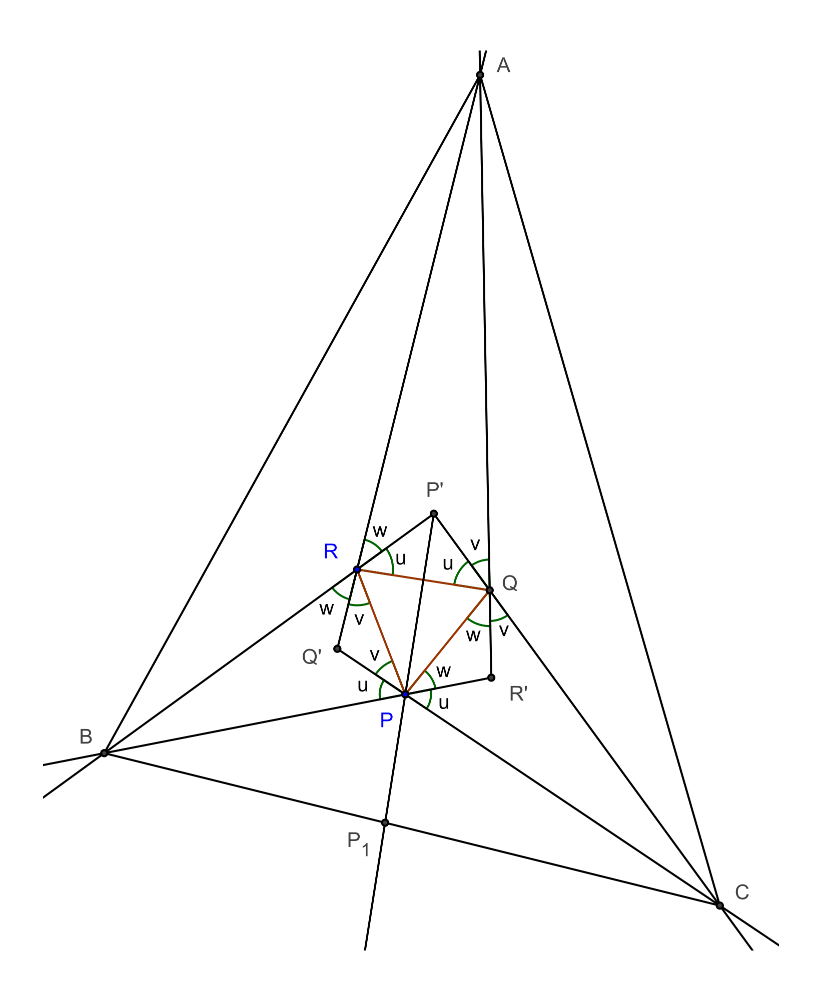


FIG. 1.5 – La figure complète

donc $\widehat{CBP} = \widehat{PBR} = \widehat{RBA}$. Comme $\widehat{CBP} + \widehat{PBR} + \widehat{RBA} = \widehat{B}$, on obtient

$$\widehat{CBP} = \frac{\widehat{B}}{3} \quad \text{et} \quad \widehat{CBR} = \widehat{CBP} + \widehat{PBR} = \frac{2\widehat{B}}{3},$$

ce qui signifie que (BP) et (BR) sont les trissectrices issues de B du triangle ABC. Les autres trissectrices seront (AR), (AQ), (CQ) et (CP).

A.II.6. Dans le triangle PBR (FIG. 1.5) :

$$\widehat{PBR} = \pi - (u+v) - (v+w) = \pi - \frac{2\pi}{3} - v = \frac{\pi}{3} - v.$$

Donc

$$\widehat{ABC} = 3\widehat{PBR} = \pi - 3v.$$

De même :

$$\begin{cases} \widehat{BCA} = \pi - 3w \\ \widehat{CAB} = \pi - 3u. \end{cases}$$

A.III.1.

$$\begin{aligned} \pi = \widehat{A_1} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1} &= (\pi - 3u) + (\pi - 3v) + (\pi - 3w) \\ &= 3\pi - 3\,(u + v + w) \end{aligned}$$

donc $u + v + w = 2\pi/3$.

A.III.2. La question (A.II.6) montre que les angles du triangle construit ABC sont égaux aux angles du triangle donné $A_1B_1C_1$. Ces triangles sont donc semblables d'après le troisième cas de similitude des triangles.

Remarque : En fait deux angles égaux suffisent pour appliquer le troisième cas de similitude, par exemple $\widehat{A} = \widehat{A_1}$ et $\widehat{B} = \widehat{B_1}$.

A.III.3. Etant donné un triangle ABC, on construit les trissectrices et le triangle PQR, puis on trace le triangle $A_1B_1C_1$ de la question précédente. On trace les trissectrices de $A_1B_1C_1$ et le triangle $P_1Q_1R_1$ obtenu. On sait que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables. Il existe donc une similitude s qui transforme A, B, C respectivement en A_1, B_1, C_1. La similitude s transforme une droite en une droite, transforme les trisectrices de ABC en celles de $A_1B_1C_1$ (puisqu'elle conserve les angles non orientés), et les intersections des trisectrices de ABC en les intersections des trisectrices de $A_1B_1C_1$. Elle transforme donc le triangle PQR en $P_1Q_1R_1$ qui est équilatéral, et cela prouve que PQR est équilatéral.

B.I.1. On envisage trois cas (voir FIG. 1.6) :

► Cas n°1 : Si $\widehat{A} < \pi/2$, $\widehat{BOC} = 2\widehat{A}$. Si H désigne le projeté orthogonal de O sur (BC), (OH) est la médiatrice de $[BC]$ mais c'est aussi la bissectrice issue de O du triangle BOC, donc $\widehat{BOC} = 2\widehat{BOH} = 2\widehat{A}$ donc $\widehat{BOH} = \widehat{A}$. En utilisant le triangle rectangle BOH, on obtient

$$\sin\widehat{A} = \sin\widehat{BOH} = \frac{BH}{BO} = \frac{a}{2r}$$

soit $a/\sin\widehat{A} = 2r$.

► Cas n°2 : Si $\widehat{A} = \pi/2$, le triangle ABC est rectangle en A donc le cercle circonscrit à ce triangle est le cercle de diamètre $[BC]$. Alors $a = BC = 2r$ et $\sin\widehat{A} = 1$. La formule $a/\sin\widehat{A} = 2r$ est triviale !

▶ Cas n°3 : Si $\widehat{A} > \pi/2$, $\widehat{BOC} = 2\pi - 2\widehat{A} = 2\widehat{BOH}$ où H est le projeté orthogonal de O sur (BC). Ainsi $\widehat{BOH} = \pi - \widehat{A}$. On conclut comme dans le cas n°1 :

$$\sin(\pi - \widehat{A}) = \sin \widehat{BOH} = \frac{BH}{BO} = \frac{a}{2r}$$

d'où $\sin \widehat{A} = a/2r$ et le résultat attendu.

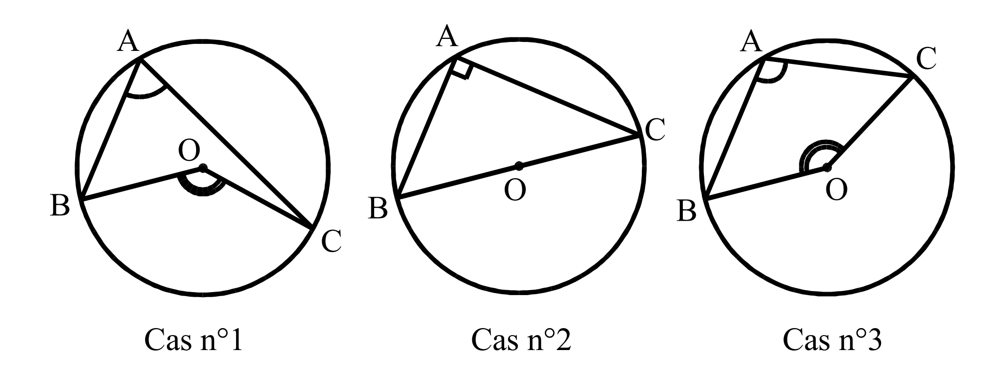


FIG. 1.6 – Avec ces inénarrables angles géométriques !

Remarque : L'utilisation d'angles géométriques a le défaut de nous obliger à envisager plusieurs cas de figure. En effet, seuls les angles (géométriques) saillants ont une mesure comprise entre 0 et π radians, et l'angle $\widehat{BOC}$ dans le triangle BOC dans le cas n°3 n'est pas de mesure $2\widehat{A}$ comme on pourrait trop vite conclure, mais plutôt $2\pi - 2\widehat{A}$. Le Théorème de l'angle inscrit n'est pas en défaut : l'angle au centre vaut toujours deux fois l'angle inscrit, mais dans ce cas, l'angle au centre est l'angle rentrant BOC.
Personnellement je préfère utiliser des angles orientés et démontrer la formule des sinus en utilisant le point B' diamétralement opposé à B sur le cercle circonscrit à ABC (FIG. 1.7). On obtient $\widehat{A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'C})\ (\pi)$ d'après le Théorème de l'angle inscrit, et on écrit une relation trigonométrique dans le triangle rectangle $BB'C$:

$$\sin \widehat{A} = |\sin(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'C})| = \frac{BC}{BB'} = \frac{a}{2r}.$$

B.I.2. On raisonne comme à la question précédente pour obtenir deux égalités similaires à $a/\sin \widehat{A} = 2r$, et on déduit la relation des sinus :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2r.$$

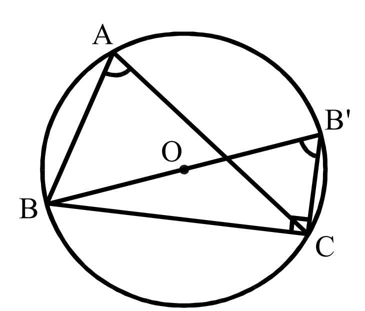


FIG. 1.7 – Utilisation de B' diamétralement opposé à B

B.II.1. On obtient

$$\frac{AR}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} \quad \text{et} \quad \frac{AB}{\sin 3\gamma} = 2r$$

d'où

$$AR = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \times 2r\sin 3\gamma.$$

Comme $\sin 3\gamma = \sin 3\left(\pi-\alpha-\beta\right) = \sin\left(3\alpha+3\beta\right)$, on obtient bien

$$AR = 2r\sin\beta\ \frac{\sin\left(3\alpha+3\beta\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

B.II.2.

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin\theta\cos 2\theta + \sin 2\theta\cos\theta\\ &= \sin\theta(2\cos^2\theta - 1) + 2\sin\theta\cos^2\theta\\ &= \sin\theta(4\cos^2\theta - 1).\end{aligned}$$

B.II.3. On a $3\alpha+3\beta+3\gamma=\pi$ donc $\gamma = \pi/3-\theta$ en posant $\theta=\alpha+\beta$.

$$\begin{aligned}4\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right) &= 4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)\\ &= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\pi-2\theta\right)\right)\\ &= 1+2\cos 2\theta\\ &= 1+2\left(2\cos^2\theta-1\right)\\ &= 4\cos^2\theta-1.\end{aligned}$$

En appliquant la formule du (B.II.2), on trouve

$$4\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)=\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

B.II.4. On applique (B.II.1) et (B.II.3) :

$$\begin{aligned}AR&=2r\sin\beta\,\frac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\\&=2r\sin\beta\times 4\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\\&=8r\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right).\end{aligned}$$

B.II.5. Ce qu'on a fait avec AR, on peut le recommencer avec AQ. Dans la formule de la question précédente, on remplace R par Q, β par γ, et γ par β, pour obtenir :

$$AQ=8r\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right).$$

En divisant les deux dernières formules membre à membre :

$$\frac{AR}{AQ}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)}$$

d'où

$$\frac{AR}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}=\frac{AQ}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)}=8r\sin\beta\sin\gamma.$$

B.II.6.1. Dans le triangle AMR,

$$\begin{aligned}\widehat{AMR}&=\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)-\alpha\\&=\frac{2\pi}{3}-\alpha-\beta\;=\;\frac{2\pi}{3}+\left(\gamma-\frac{\pi}{3}\right)\;=\;\frac{\pi}{3}+\gamma.\end{aligned}$$

B.II.6.2. On obtient :

$$\frac{AM}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)}=\frac{AR}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}=\frac{AQ}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)}$$

d'où $AM=AQ$.

B.II.6.3. Les points M et Q appartiennent à la même demi-droite $[AQ)$ d'origine A, et vérifient $AM=AQ$, donc sont confondus.

B.II.6.4. Puisque $M = Q$, et par définition de M,

$$\widehat{ARQ} = \widehat{ARM} = \frac{\pi}{3} + \beta \quad \text{et} \quad \widehat{AQR} = \widehat{AMR} = \frac{\pi}{3} + \gamma.$$

B.II.7. On ré-écrit la formule des sinus dans le triangle ARM (qui s'appelle aussi ARQ) :

$$\frac{RQ}{\sin\alpha} = \frac{RM}{\sin\alpha} = \frac{AR}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)} = \frac{AQ}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)} = 8r \sin\beta \sin\gamma$$

d'où $RQ = 8r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

B.II.8. La quantité $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ est invariante par permutation circulaire, donc les calculs précédents faits à partir des sommets B et C (à la place de A) donnent

$$\begin{cases} PR = 8r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \\ QP = 8r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \end{cases}$$

et l'on aura bien $RQ = PR = QP = 8r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$. Le triangle PQR est donc équilatéral.

C.I.1. On sait bien que :

$$z^3 = 1 \;\Leftrightarrow\; (z-1)\left(z^2 + z + 1\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; z \in \{1, j, j^2\}.$$

De façon classique, pour résoudre l'équation $z^3 = 1$, on écrit z sous forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$, puis on écrit :

$$\begin{aligned} z^3 = 1 \;\Leftrightarrow\; r^3 e^{i3\theta} = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ 3\theta \equiv 0 \;\; (2\pi) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \{0,1,2\} \quad \theta \equiv k2\pi/3 \;\; (2\pi) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow z \in \{1, j, j^2\}. \end{aligned}$$

C.I.2. On a $j^3 = 1$, donc $(j-1)\left(j^2 + j + 1\right) = 0$, et comme $j \neq 1$, on obtient $j^2 + j + 1 = 0$.

C.I.3. On suppose que PQR est un triangle direct[1]. Sous cette condition, PQR est équilatéral si et seulement si R est l'image de Q par la rotation de centre P et d'angle $\pi/3$, c'est-à-dire :

$$r - p = e^{i\pi/3}\,(q - p)\,.$$

[1] Rappelons que cela signifie que, dans le plan orienté, la base $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ est directe, ou, ce qui revient au même, que la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ est comprise entre 0 et π.

Comme $e^{i\pi/3} = -j^2$, cela s'écrit successivement

$$r - p = -j^2\,(q - p)$$

$$r - (1 + j^2)p + j^2 q = 0$$

$$r + jp + j^2 q = 0.$$

En multipliant les deux membres de cette dernière équation par j^2, on obtient la condition annoncée : $p + jq + j^2 r = 0$.

C.I.4. Dans cette question, on suppose PQR indirect. Alors PQR est équilatéral si et seulement si R est l'image de Q par la rotation de centre P et d'angle $-\pi/3$, c'est-à-dire : $r - p = e^{-i\pi/3}\,(q - p)$. Comme $e^{-i\pi/3} = -j$, cela s'écrit successivement

$$r - p = -j\,(q - p)$$

$$r - (1 + j)p + jq = 0$$

$$r + j^2 p + jq = 0.$$

En multipliant les deux membres de cette dernière équation par j, on obtient : $p + j^2 q + jr = 0$.

C.II.1. P et P' sont symétriques par rapport à (BC), donc (BC) est la bissectrice du couple de demi-droites $([CP), [CP'))$ et

$$(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP'}) = 2(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB}) = 2\gamma \ \ (2\pi)$$

C.II.2. Il est facile de voir que

$$\begin{cases} (g \circ h)\,(P) = g(P') = P \\ (f \circ g)\,(R) = f(R') = R \\ (h \circ f)\,(Q) = h(Q') = Q. \end{cases}$$

C.III.1. Une rotation r de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ transforme un point M d'affixe z en un point $M' = r\,(M)$ d'affixe $z' = e^{i\theta}\,(z - \omega) + \omega$. On identifie commodément points et affixes de points, donc on s'autorise à écrire $r\,(z) = e^{i\theta}\,(z - \omega) + \omega$. Ici, on obtient :

$$\begin{cases} f\,(z) = a_1 z + b_1 \text{ avec } a_1 = e^{i2\alpha} \\ g\,(z) = a_2 z + b_2 \text{ avec } a_2 = e^{i2\beta} \\ h\,(z) = a_3 z + b_3 \text{ avec } a_3 = e^{i2\gamma}. \end{cases}$$

C.III.2. Le triangle ABC est direct, donc les mesures principales 3α, 3β, 3γ des angles de ce triangle sont strictement comprises entre 0 et π. On a

$$\begin{cases} 0 < 3\alpha < \pi \\ 0 < 3\beta < \pi \\ 0 < 3\gamma < \pi \end{cases} \quad \text{et} \quad 3\alpha + 3\beta + 3\gamma = \pi.$$

Ainsi $a_1 a_2 a_3 = e^{i2\alpha} e^{i2\beta} e^{i2\gamma} = e^{i2(\alpha+\beta+\gamma)} = e^{i2\pi/3} = j$.

Si l'on avait $a_1 a_2 = 1$, la composée $f \circ g$ de deux rotations serait une translation dont le vecteur ne peut être que nul (puisque $(f \circ g)(R) = R$). On aurait donc $f \circ g = Id$, soit $f = g^{-1}$, ce qui est impossible puisque f et g^{-1} sont des rotations de centres différents. Ainsi $a_1 a_2 \neq 1$. On montrerait pareillement que $a_2 a_3 \neq 1$ et $a_3 a_1 \neq 1$.

C.III.3.

$$\begin{aligned} (g \circ h)(p) = p \Rightarrow \; & g(a_3 p + b_3) = p \\ \Rightarrow \; & a_2 (a_3 p + b_3) + b_2 = p \\ \Rightarrow \; & p = \frac{a_2 b_3 + b_2}{1 - a_2 a_3}. \end{aligned}$$

Les deux autres égalités se montrent de la même façon.

C.III.4.1. Posons $\tau = f^3 \circ g^3 \circ h^3$. Le premier résultat admis par l'énoncé montre que $\tau(z)$ est de la forme $\tau(z) = uz + v$ avec $u = (a_1 a_2 a_3)^3 = j^3 = 1$. Donc $\tau(z) = z + v$ et τ est une translation.

C.III.4.2. De façon générale, notons $r_{\Omega,\theta}$ la rotation de centre Ω et d'angle θ. On a $\tau = f^3 \circ g^3 \circ h^3 = r^3_{A,2\alpha} \circ r^3_{B,2\beta} \circ r^3_{C,2\gamma} = r_{A,6\alpha} \circ r_{B,6\beta} \circ r_{C,6\gamma}$, et montrer que $\tau(A) = A$, revient à montrer que

$$r_{B,6\beta} \circ r_{C,6\gamma} \; (A) = A.$$

Si l'on note $\widehat{A} = 3\alpha$, $\widehat{B} = 3\beta$ et $\widehat{C} = 3\gamma$, on est amené à montrer l'égalité :

$$r_{B,2\widehat{B}} \circ r_{C,2\widehat{C}} \; (A) = A. \quad (*)$$

Notons :

▷ $s_{(BC)}$ est la réflexion par rapport à (BC).

▷ s_{D_B} est la réflexion par rapport à la droite D_B passant par B et telle que $((BC), D_B) = \widehat{B} \; (\pi)$ (il s'agit d'angles de droites).
De $((BC), D_B) = \widehat{B} = ((BC), (BA)) \; (\pi)$ on déduit que $D_B = (BA)$.

$\triangleright$ s_{D_C} est la réflexion par rapport à la droite D_C passant par C et telle que $(D_C, (BC)) = \widehat{C}\ \ (\pi)$. Cette condition montre que $D_C = (CA)$.

Alors

$$r_{B,2\widehat{B}} \circ r_{C,2\widehat{C}} = (s_{D_B} \circ s_{(BC)}) \circ (s_{(BC)} \circ s_{D_C}) = s_{D_B} \circ s_{D_C}$$

et l'on sait que $s_{D_B} \circ s_{D_C}$ est la rotation de centre A, intersection de $D_B = (BA)$ et $D_C = (CA)$, et d'angle $2(D_C, D_B) = 2\widehat{B} + 2\widehat{C}$ (on a $2\widehat{B} + 2\widehat{C} \neq 0\ \ (2\pi)$ autrement $\widehat{B} + \widehat{C} = 0\ \ (\pi)$ entraînerait $\widehat{A} = 0\ \ (\pi)$, absurde). L'égalité $(*)$ est démontrée.

Finalement la translation τ laisse A invariant, c'est donc l'identité.

C.III.4.3. $\bullet$ *Cas où le triangle ABC est direct* :
L'énoncé nous offre l'expression de $\tau(z)$ en fonction de z. Il s'agit d'une expression de la forme $\tau(z) = (a_1a_2a_3)^3z + v$ où $(a_1a_2a_3)^3 = 1$ et

$$v = (a_1^2 + a_1 + 1)b_1 + a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + a_1^3a_2^3(a_3^2 + a_3 + 1)b_3.$$

Comme $\tau = Id$, on obtient $v = 0$. Mais l'énoncé nous donne aussi

$$p + jq + j^2r^2 = -j^2 \frac{a_3 v}{a_1(1 - a_2a_3)(1 - a_3a_1)(1 - a_1a_2)},$$

donc $p + jq + j^2r^2 = 0$ et la question (C.III.1.3) montre que PQR est équilatéral direct.

$\bullet$ *Cas où le triangle ABC est indirect* :
C'est un faux problème. Etant donné un triangle ABC du plan euclidien, il est toujours possible d'orienter le plan de sorte que ABC soit un triangle direct. On peut donc *toujours* appliquer le résultat du cas précédent.
Une autre façon de conclure est de reprendre toutes les questions précédentes en les adaptant, puis conclure en utilisant le critère (C.III.1.4).

PROBLEME 2 : INTERPOLATION POLYNOMIALE, METHODE DES DIFFERENCES FINIES

Partie I : Approximation d'une fonction sur un intervalle

Avertissement : je me permettrai de faire l'abus de confondre un polynôme à coefficient dans $\mathbb{R}$ et une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cela ne pose pas de problème particulier puisque $\mathbb{R}$ est un corps commutatif de caractéristique nulle (donc infini).

I.1.1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction dérivée $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ s'annule en changeant de signe en 0, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0_+	$\nearrow$	1	$\searrow$	0_+

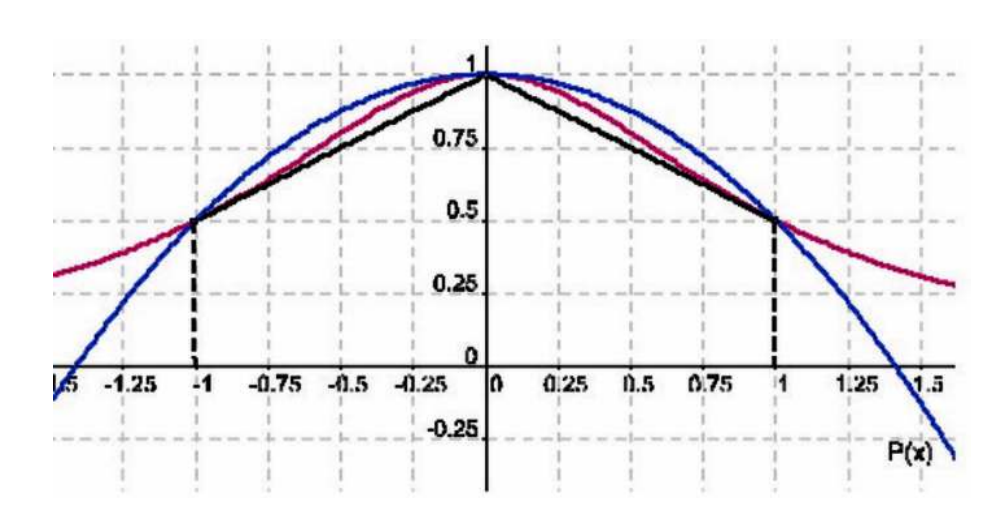


FIG. 1.8 – $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

I.1.2. La représentation graphique de f est celle d'une courbe en cloche (FIG. ??).

I.2.1. On pose $R(x) = ax+b$. Les constantes a et b doivent vérifier $a+b = 1/2$ et $b = 1$, donc $R(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

I.2.2. On pose $Q(x) = cx + d$, et l'on doit avoir $-c+d = 1/2$ et $d = 1$, donc $Q(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

I.2.3. Voir FIG. ??.

I.2.4. Pour tout $x \in [-1, 0]$,

$$\begin{aligned} g(x) \leq f(x) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 1 \leq \frac{1}{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow (x+2)\left(x^2+1\right) \leq 2 \\ &\Leftrightarrow x\left(x^2+2x+1\right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x(x+1)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq 0 \end{aligned}$$

et la dernière inégalité obtenue est toujours vraie sur $[-1,0]$. Donc $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in [-1,0]$. De même, si $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} g(x) \leq f(x) &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + 1 \leq \frac{1}{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow (-x+2)\left(x^2+1\right) \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -x\left(x^2-2x+1\right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -x(x-1)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \end{aligned}$$

donc $g(x) \leq f(x)$ sur $[0,1]$.

I.2.5. Comme g est une fonction paire,

$$I_g = 2\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 (-x+2)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Comme $g \leq f$ sur $[-1,1]$, on aura $I_g = 3/2 \leq I_f$.

I.3.1. Si deux polynômes P et Q sont de degrés ≤ 2 et prennent les mêmes valeurs en -1, 0 et 1, alors $P - Q$ est un polynôme de degré ≤ 2 qui possède trois racines (à savoir -1, 0 et 1). C'est impossible sauf s'il s'agit du polynôme nul. Donc $P = Q$.

Remarque : L'impossibilité vient de la propriété du cours suivant laquelle "tout polynôme non nul de degré n à coefficients dans $\mathbb{R}$ possède au plus n racines".

I.3.2. On trouve $L_i(j) = \delta_{ij}$ où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker (qui vaut 1 si $i = j$, et 0 sinon).

I.3.3. P est une somme de fonctions polynomiales de degrés 2, c'est donc une fonction polynomiale de degré ≤ 2. On a

$$P(x) = \sum\nolimits_{i\in\{-1,0,1\}} f(i)\,L_i(x).$$

Si $j \in \{-1,0,1\}$, on obtient donc

$$P(j) = \sum\nolimits_{i\in\{-1,0,1\}} f(i)\,L_i(j) = \sum\nolimits_{i\in\{-1,0,1\}} f(i)\,\delta_{ij} = f(j).$$

I.3.4. On vient de démontrer qu'il existe une et une seule fonction polynomiale de degré ≤ 2 qui prenne les valeurs $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$ respectivement en -1, 0, 1.

I.3.5. On calcule :

$$P(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x(x-1)}{2} + 1 \times (-(x-1)(x+1)) + \frac{1}{2} \times \frac{x(x+1)}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 1.$$

Pour $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} f(x) \leq P(x) &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} \leq -\frac{1}{2}x^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \left(1 - x^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq 1 \end{aligned}$$

et l'on a toujours $x^2 \leq 1$ sur $[-1, 1]$. Cela montre que $f \leq P$ sur $[-1, 1]$.

I.3.6. La courbe représentative de P est une parabole qui tourne sa concavité vers les y négatifs (FIG. **??**).

I.3.7. En intégrant l'inégalité $f \leq P$ sur $[-1, 1]$, on obtient

$$I_f \leq \int_{-1}^{1} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 1\right) dx = \left[-\frac{x^3}{6} + x\right]_{-1}^{1} = \frac{5}{3}.$$

I.3.8. Les questions (2.5) et (3.7) donnent

$$1,5 \leq I_f \leq \frac{5}{3} \leq 1,666\,7.$$

Si l'on prend

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{3}\right) = \frac{19}{12} \simeq 1,58$$

on a $|I_f - 1,58| \leq 10^{-1}$, donc $1,58$ est une valeur approchée de I_f à 10^{-1} près.

I.4. L'unicité d'un tel polynôme P se démontre comme en (3.1). Pour l'existence, il suffit de noter que $L_i(j) = \delta_{ij}$ quels que soit i et j, de sorte que

$$P(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \, L_i(x)$$

soit un polynôme de degré ≤ 2 qui vérifie $P(i) = y_i$ pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$.

Partie II : Méthode de Newton

II.1.1. P_0 est la fonction constante prenant la valeur y_0 en tout réel x.

II.1.2. S'il existait deux fonctions polynomiales P et Q de degrés ≤ 1 vérifiant la propriété $(\mathcal{E}_1)$, la fonction polynomiale $P - Q$ serait de degré ≤ 1 et possèderait deux racines (0 et 1), donc serait nulle. Cela montre qu'il existe au plus une fonction polynomiale P_1 vérifiant la propriété $(\mathcal{E}_1)$. En posant

$$P_1(x) = \Delta^0 y_0 + \left(\Delta^1 y_0\right) x = y_0 + (y_1 - y_0)\, x,$$

on constate que $\deg P_1 \leq 1$, $P_1(0) = y_0$ et $P_1(1) = y_1$. Il existe donc bien une fonction polynomiale vérifiant la propriété $(\mathcal{E}_1)$.

II.1.3. $\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$.
De même $\Delta^2 y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$, donc

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 \\ &= (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0) \\ &= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.\end{aligned}$$

II.2.1. Q_2 est de degré inférieur ou égal à 2 comme différence de deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 2.

II.2.2. On a

$$\begin{cases} Q_2(0) = P_2(0) - P_1(0) = y_0 - y_0 = 0 \\ Q_2(1) = P_2(1) - P_1(1) = y_1 - y_1 = 0 \end{cases}$$

donc 0 et 1 sont des racines de Q_2. Les polynômes x et $x - 1$ divisent ainsi Q_2. Comme $\deg Q_2 \leq 2$, il existera une constante c_2 telle que $Q_2(x) = c_2 x(x-1)$.

II.2.3. On a

$$\begin{cases} Q_2(2) = P_2(2) - P_1(2) = y_2 - P_1(2) \\ Q_2(2) = 2c_2, \end{cases}$$

donc $c_2 = \dfrac{1}{2}(y_2 - P_1(2))$. D'après (II.1.2) :

$$P_1(2) = \Delta^0 y_0 + \left(\Delta^1 y_0\right) \times 2 = y_0 + 2(y_1 - y_0) = 2y_1 - y_0,$$

donc $c_2 = \dfrac{1}{2}(y_2 - (2y_1 - y_0)) = \dfrac{1}{2}(y_2 - 2y_1 + y_0) = \dfrac{\Delta^2 y_0}{2}$.

II.2.4. En utilisant l'expression de $P_1(x)$ obtenue en (II.1.2) et les questions précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P_1(x) + Q_2(x) \\ &= \Delta^0 y_0 + \left(\Delta^1 y_0\right) x + \Delta^2 y_0 \, \frac{x(x-1)}{2}. \end{aligned}$$

II.3. S'il existe une fonction P_3 vérifiant la propriété $(\mathcal{E}_3)$, le polynôme $Q_3(x) = P_3(x) - P_2(x)$ est de degré ≤ 3 et vérifie $Q_3(0) = Q_3(1) = Q_3(2) = 0$. Il existe donc un nombre réel c_3 tel que $Q_3(x) = c_3 x(x-1)(x-2)$. On a

$$\begin{cases} Q_3(3) = P_3(3) - P_2(3) = y_3 - P_2(3) \\ Q_3(3) = c_3 \times 3!, \end{cases}$$

d'où $c_3 = \dfrac{1}{3!}(y_3 - P_2(3))$, et tout revient à calculer $P_2(3)$. Utilisons l'expression obtenue en (II.2.4) :

$$\begin{aligned} P_2(3) &= \Delta^0 y_0 + 3\left(\Delta^1 y_0\right) + 3\left(\Delta^2 y_0\right) \\ &= y_0 + 3(y_1 - y_0) + 3(y_2 - 2y_1 + y_0) \\ &= y_0 - 3y_1 + 3y_2. \end{aligned}$$

Finalement $c_3 = \dfrac{1}{3!}(y_3 + 3y_1 - 3y_2 - y_0) = \dfrac{\Delta^3 y_0}{3!}$, et

$$\begin{aligned} P_3(x) &= P_2(x) + Q_3(x) \\ &= \Delta^0 y_0 + \left(\Delta^1 y_0\right) x + \left(\Delta^2 y_0\right) \frac{x(x-1)}{2} + \left(\Delta^3 y_0\right) \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}. \quad (*) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc affirmer que, s'il existe un polynôme P_3 satisfaisant la propriété $(\mathcal{E}_3)$, alors ce polynôme est unique et donné par l'expression $(*)$. Pour montrer l'existence, il suffit de définir P_3 grâce à la formule $(*)$, puis de vérifier que $P_3(k) = y_k$ pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Partie III : Résolution d'une équation aux différences finies

III.1.1. Si $Q = 0$, le polynôme constant $P(x) = \alpha$ vérifie $P(0) = \alpha$ et $P(x+1) - P(x) = Q(x) = 0$, donc satisfait la propriété $(C_{Q,\alpha})$. L'unicité sera démontrée comme dans la question suivante.

III.1.2. Si P et T vérifient la propriété $(C_{Q,\alpha})$, alors $P(0) = \alpha = T(0)$ et

$$P(x+1) - P(x) = Q(x) = T(x+1) - T(x)$$

donc $P(x+1) - T(x+1) = P(x) - T(x)$. Le polynôme $W = P - T$ vérifie ainsi

$$\begin{cases} W(0) = 0 \\ W(x+1) = W(x). \end{cases}$$

Une récurrence facile montre alors que $W(n) = 0$ pour tout entier naturel n. Le polynôme W admet donc une infinité de racines réelles, et, à ce titre, ne peut être que nul. Donc $P = T$.

III.2.1. Si P était constant, on aurait $Q(x) = P(x+1) - P(x) = 0$, ce qui est contraire à notre hypothèse.

III.2.2. Posons $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0$, où $a_m \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} Q(x) &= P(x+1) - P(x) \\ &= \left[a_m(x+1)^m + a_{m-1}(x+1)^{m-1} + ...\right] - \left[a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ...\right] \\ &= m a_m x^{m-1} + U(x) \end{aligned}$$

où $\deg U \leq m-2$. Comme $m a_m \neq 0$, on en déduit $\deg Q = m-1$. Et comme $\deg Q \leq 3$, on aura certainement $m \leq 4$.

Remarque : Attention à l'énoncé qui demande seulement de démontrer que $\deg Q \leq m-1$, mais attend le candidat au détour du chemin si celui-ci conclut hâtivement que $\deg Q \leq m-1$ et $\deg Q \leq 3$ entraîne $m-1 \leq 3$ (lourde erreur bien sûr...).

III.2.3. Les polynômes H_0, ..., H_4 sont de degrés échelonnés de 0 à 4, donc engendrent le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_4[x]$ des polynômes à coefficients réels de degrés ≤ 4. Il existera donc une unique 5-liste de coefficients $(a_0, ..., a_4)$ telle que $P(x) = a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x) + a_3 H_3(x) + a_4 H_4(x)$.

III.2.4. On obtient $\alpha = P(0) = a_0 H_0(0) = a_0$ en substituant 0 à x dans la relation précédente.

III.2.5. On a

$$H_k(x) = \frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!}$$

pour tout $k \in \{1,2,3,4\}$, donc

$$\begin{aligned} H_k(x+1) - H_k(x) &= \frac{(x+1)x...(x-k+2)}{k!} - \frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!} \\ &= \frac{(x+1)-(x-k+1)}{k!} x(x-1)...(x-k+2) \\ &= \frac{x(x-1)...(x-k+2)}{(k-1)!} \\ &= H_{k-1}(x). \end{aligned}$$

III.2.6. En tenant compte des questions précédentes,

$$Q(x) = P(x+1) - P(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k \left(H_k(x+1) - H_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{4} a_k \, H_{k-1}(x),$$

autrement dit $Q(x) = a_1 \, H_0(x) + a_2 \, H_1(x) + a_3 \, H_2(x) + a_4 \, H_3(x)$.

III.3.1. • Dans la partie "analyse du problème" (questions 2.1 à 2.6), on a montré que si P vérifiait la propriété $(C_{Q,\alpha})$, alors

$$P(x) = a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x) + a_3 H_3(x) + a_4 H_4(x)$$

avec

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ Q(x) = a_1 H_0(x) + a_2 H_1(x) + a_3 H_2(x) + a_4 H_3(x). \end{cases} \quad (*)$$

Passons à la synthèse : étant donnés Q et α, on définit les coefficients a_i comme dans $(*)$ (cela les détermine de façon unique car $(H_0, ..., H_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$), et on pose $P(x) = a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x) + a_3 H_3(x) + a_4 H_4(x)$. Avec un tel choix, $P(0) = a_0 H_0(0) = a_0 = \alpha$, et

$$\begin{aligned} P(x+1) - P(x) &= \sum_{k=0}^{4} a_k \left(H_k(x+1) - H_k(x)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{4} a_k \, H_{k-1}(x) \quad = \quad Q(x) \end{aligned}$$

donc P vérifie bien la propriété $(C_{Q,\alpha})$.

• Le polynôme $Q(x)$ est de degré ≤ 3 et vérifie $Q(j) = y_j$ pour tout $j \in \{0, ..., 3\}$. La question (II.3) montre que

$$Q(x) = \Delta^0 y_0 + \left(\Delta^1 y_0\right) \, H_1(x) + \Delta^2 y_0 \, H_2(x) + \Delta^3 y_0 \, H_3(x).$$

Avec $(*)$, cela nous offre deux expression de $Q(x)$ dans la base $(H_0, ..., H_3)$, et l'on en déduit $a_k = \Delta^{k-1} y_0$ pour tout $k \in \{1, ..., 4\}$. Par suite

$$P(x) = \alpha + (\Delta^0 y_0) \, H_1(x) + (\Delta^1 y_0) \, H_2(x) + (\Delta^2 y_0) \, H_3(x) + (\Delta^3 y_0) \, H_4(x).$$

III.3.2. La question précédente montre qu'il existe un polynôme P qui vérifie la propriété $(C_{Q,\alpha})$, et la question (III.1.2) montre que ce polynôme est unique.

Partie IV : Somme des puissances $3^{\text{ièmes}}$ des k premiers entiers

IV.1. On a

$$P(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(P(i+1) - P(i)\right) = \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)^3 = \sigma_k$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

IV.2. $P(x)$ vérifie la propriété $(C_{Q,0})$ (on rappelle que $\alpha = P(0) = 0$), et l'on peut appliquer la question (III.3.1) :

$$\begin{aligned}\sigma_k &= P(k) \\ &= \left(\Delta^0 y_0\right) H_1(k) + \left(\Delta^1 y_0\right) H_2(k) + \left(\Delta^2 y_0\right) H_3(k) + \left(\Delta^3 y_0\right) H_4(k).\end{aligned}$$

IV.3. On a $y_j = Q(j) = (j+1)^3$, donc $(y_0, y_1, y_2, y_3) = (1, 8, 27, 64)$. En utilisant (II.1.3), on trouve :

$$\begin{cases} \Delta^0 y_0 = y_0 = 1 \\ \Delta^1 y_0 = y_1 - y_0 = 7 \\ \Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = 27 - 2 \times 8 + 1 = 12 \\ \Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = 64 - 3 \times 27 + 3 \times 8 - 1 = 6. \end{cases}$$

IV.4. On en déduit

$$\begin{aligned}\sigma_k &= H_1(k) + 7\,H_2(k) + 12\,H_3(k) + 6\,H_4(k) \\ &= k + \frac{7}{2} k(k-1) + 2k(k-1)(k-2) + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4} \\ &= \frac{k}{4}\left[4 + 14(k-1) + 8(k-1)(k-2) + (k-1)(k-2)(k-3)\right]\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\sigma_k &= \frac{k}{4}\left[4 + (k-1)\left(14 + 8k - 16 + k^2 - 5k + 6\right)\right] \\ &= \frac{k}{4}\left[4 + (k-1)\left(k^2 + 3k + 4\right)\right] \\ &= \frac{k}{4}\left(k^3 + 2k^2 + k\right) \quad = \quad \frac{k^2(k+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

Chapitre 2

CAPES interne 2010

2.1 Énoncé

PROBLEME I : ANALYSE

Ce problème a pour objet l'étude d'une courbe de Gauss et l'approximation d'une intégrale. Toutes les fonctions considérées sont des fonctions de la variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Partie I - Inégalité des accroissements finis

Soient m et M deux nombres réels tels que $m \leq M$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point) et g une fonction définie et dérivable sur l'intervalle I telle que, pour tout nombre réel x de l'intervalle I, on a :

$$m \leq g\prime(x) \leq M.$$

On fixe un nombre réel a dans l'intervalle I et on introduit les fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle I par :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= g(x) - g(a) - m(x-a), \\ \psi(x) &= g(x) - g(a) - M(x-a). \end{aligned}$$

1. Étudier le sens de variation des fonctions φ et ψ sur l'intervalle I.

2. En déduire que, pour tous nombres réels a et b appartenant à l'intervalle I et tels que $a \leq b$, on a la double inégalité suivante :

$$m(b-a) \leq g(b) - g(a) \leq M(b-a).$$

[0] [ag79e] v1.00

Partie II - Etude d'une fonction gaussienne et de sa courbe représentative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2/2}$.

1. Étudier la parité de la fonction f et son sens de variation sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$, en indiquant les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. **Etude de la fonction f'.**

3.1. Montrer que f est solution de l'équation différentielle linéaire $y' + xy = 0$.

3.2. En déduire que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout nombre réel x, sa dérivée f'' vérifie la relation suivante :

$$f''(x) = (x^2 - 1)f(x).$$

3.3. En déduire le sens de variation de la fonction f' sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

4. Montrer que, pour tout nombre réel x tel que $0 \leq x \leq 1$, on a : $-1 \leq f''(x) \leq 0$.

5. Montrer que pour tous nombres réels a et b tels que $0 \leq a \leq b \leq 1$, on a :

$$f'(b)(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(a)(b-a),$$

et que pour tous nombres réels a et b tels que $1 \leq a \leq b$, on a :

$$f'(a)(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(b)(b-a).$$

Dans toute la suite du problème, on munit le plan euclidien d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et on note Γ la courbe représentative de la fonction f dans ce repère.

6. **Etude des tangentes à la courbe Γ**

Soit a un nombre réel. On note T_a la tangente à la courbe Γ au point de coordonnées $(a, f(a))$. Pour tout nombre réel x on note désormais $u(x)$ l'ordonnée du point de T_a d'abscisse x.

6.1. Expliciter une expression de $u(x)$.

6.2. On suppose ici que le nombre réel a appartient à l'intervalle $]0; 1[$. Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 1]$, on a :

$$f(x) \leq u(x).$$

Interpréter graphiquement ce résultat.

6.3. On suppose ici que le nombre réel a appartient à l'intervalle $]1;+\infty[$. Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;+\infty[$, on a :

$$f(x) \geq u(x).$$

Interpréter graphiquement ce résultat.

6.4. Déterminer le signe de $f(x)-u(x)$ selon les valeurs du nombre réel x dans le cas où $a=1$. Interpréter le résultat graphiquement.

7. **Etude des cordes de la courbe** Γ

Soient a et b deux nombres réels tels que $a<b$. On note $D_{a,b}$ la droite passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Pour tout nombre réel x, on note désormais $v(x)$ l'ordonnée du point de $D_{a,b}$ d'abscisse x.

7. 1. Expliciter une expression de $v(x)$.

7.2. On suppose que les réels a et b vérifient $0 \leq a \leq b \leq 1$.

7.2.1. Montrer qu'il existe un réel $c \in [a;b]$ tel que $f'(c)-v'(c)=0$.

7.2.2. Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[a;b]$, on a :

$$f(x) \geq v(x).$$

Interpréter graphiquement ce résultat.

7.2.3. Démontrer de façon analogue que, si les nombres réels a et b appartiennent à l'intervalle $[1;+\infty[$, on a pour tout nombre réel x de l'intervalle $[a;b]$:

$$f(x) \leq v(x).$$

Interpréter graphiquement ce résultat.

8. Tracer, dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 5 cm, la courbe Γ ainsi que les tangentes T_0, $T_{1/2}$, T_1, T_2 et les droites $D_{0,1}$ et $D_{1,2}$.

Dans toute la suite du problème, f désigne encore la fonction définie dans la partie II. Le fait que f soit continue sur $\mathbb{R}$ justifie l'existence, pour tous nombres réels a et b, de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$.

On pose $A=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$, *c'est-à-dire* $A=\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2/2}\,dt$.

Les trois parties III, IV et V suivantes proposent de déterminer des valeurs approchées de A.

Partie III - Table de la loi centrée réduite

On admettra que l'on définit une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{R}$ en posant, pour tout nombre réel x :

$$\mathbb{P}(]-\infty, x]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt.$$

On pourra écrire en particulier :

$$\mathbb{P}(]-\infty, +\infty[) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1.$$

Cette probabilité $\mathbb{P}$ est celle de la loi normale centrée réduite.

1. Préciser la valeur de $\mathbb{P}(]-\infty, 0])$.
2. Exprimer A en fonction de $\mathbb{P}(]-\infty, 1])$.
3. Dans une table de la loi normale centrée réduite, on lit :

$$\mathbb{P}(]-\infty, 1]) \simeq 0,8413 \quad \text{(arrondi au dix-millième).}$$

En déduire une approximation de A à 10^{-3} près.

- Partie IV -

Approximation par une somme d'aires de rectangles

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de A qui permette d'en fournir une valeur décimale approchée à 10^{-2} près. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie de la façon suivante : pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Soit n un entier naturel non nul.

1.1. Démontrer que pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, et pour tout nombre réel t de l'intervalle $[(k-1)/n\,;\,k/n]$, on a :

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

1.2. En déduire que pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\, dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

2. Déduire de la question précédente que, pour tout entier naturel n non nul, on a les inégalités :

$$u_n \leq A \leq \frac{1}{n} + u_n - \frac{1}{n\sqrt{e}}.$$

3.

3.1. Déduire de la question précédente un encadrement de u_n, valable pour tout entier naturel n non nul.

3.2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

4. En utilisant les inégalités établies à la question IV.2, déterminer une valeur de n telle que u_n soit une valeur approchée par défaut de A à 10^{-2} près. (On ne demande pas de calculer ici cette valeur approchée.)

- Partie V -
Approximation par une somme d'aires de trapèzes

On se propose dans cette partie d'obtenir une autre valeur approchée de A, en utilisant des résultats établis dans la partie II. Pour cela, on considérera les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies de la façon suivante : pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{2n} f(0) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n} f(1) \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right).$$

Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle $[0;1]$ tels que $a < b$.

1. Justifier que la partie de la courbe Γ située entre les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ est située en dessous de $T_{(a+b)/2}$ et au-dessus de $D_{a,b}$.

2. Démontrer la double inégalité suivante :

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a $v_n \leq A \leq w_n$.

4. Expliciter v_3 et w_3, puis donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près par défaut de v_3 et une valeur décimale approchée à 10^{-3} près par excès de w_3. En déduire une valeur décimale approchée de A à 10^{-2} près.

5. **Convergence des suites** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **et** $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

5.1. En intégrant par parties $\int_{(a+b)/2}^{b} (t-b)\, f''(t)\, dt$, montrer que :

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_{(a+b)/2}^{b} (t-b)\, f''(t)\, dt.$$

5.2. Montrer de même que :

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_{a}^{(a+b)/2} (a-t)\, f''(t)\, dt.$$

5.3. En utilisant II.4, justifier que l'on a :

- Pour tout réel t de $[(a+b)/2\,;\, b]$, $0 \leq (t-b)\, f''(t) \leq b-t\,;$
- Pour tout réel t de $[a\,;\,(a+b)/2]$, $0 \leq (a-t)\, f''(t) \leq t-a$.

5.4. Déduire de V.5.1, V.5.2 et de V.5.3 que :

$$0 \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \frac{1}{8}(b-a)^2.$$

5.5. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq w_n - v_n \leq \frac{1}{8n^2}.$$

5.6. En utilisant V.3 et V.5.5, justifier que l'on a, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq A - v_n \leq \frac{1}{8n^2} \quad \text{et} \quad 0 \leq w_n - A \leq \frac{1}{8n^2}.$$

En déduire que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers A.

6. **Estimation plus fine de l'erreur commise par défaut**

6.1. En intégrant par parties $\int_a^b (t-a)(t-b)\, f''(t)\, dt$, montrer que :

$$\int_a^b f(t)\, dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b (t-a)(t-b)\, f''(t)\, dt.$$

6.2. En utilisant II.4, justifier que pour tout réel t de $[a;b]$:

$$0 \leq (t-a)(t-b)\, f''(t) \leq (t-a)(b-t).$$

6.3. En utilisant V.6.1, déduire que :

$$0 \leq \int_a^b f(t)\,dt - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \leq \frac{1}{12}(b-a)^3.$$

6.4. Montrer que, pour tout entier naturel n strictement positif :

$$0 \leq A - v_n \leq \frac{1}{12n^2}.$$

6.5. A partir de quelle valeur de n est-on sûr que v_n soit une valeur approchée de A à 10^{-3} près ?

6.6. En notant p la valeur de n trouvée à la question précédente, déterminer une valeur approchée de v_p à la précision de la calculatrice. Ce résultat est-il en accord avec l'approximation à 10^{-3} près de A obtenue à la partie III par lecture de la table de la loi normale centrée réduite ?

PROBLEME II : GEOMETRIE

Ce problème a pour but d'établir l'inégalité isopérimétrique dans le cas des polygones convexes et d'établir le résultat suivant :

> parmi tous les polygones convexes ayant n côtés et un périmètre fixé p, le polygone régulier est de plus grande aire.

Dans tout le problème, *on admettra l'existence d'un polygone convexe d'aire maximale parmi tous les polygones convexes ayant le même nombre de côtés*, la démonstration de cette existence dépassant les limites du programme du concours.

Rappels et notations :

On travaille dans le plan affine euclidien.

• Si A, B et C sont trois points du plan (avec $A \neq B$ et $A \neq C$), on note $\widehat{ABC}$ l'angle géométrique saillant (mesuré dans $[0, \pi]$) délimité par les demi-droites $[BA)$ et $[BC)$.

• La distance entre deux points A et B ainsi que la longueur du segment $[AB]$ est notée AB.

• Par abus de notation, si (AH) est la hauteur du triangle ABC issue de A, on appellera également hauteur la longueur AH du segment $[AH]$, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

• Par commodité d'écriture, on pourra noter $\mathcal{P}(P)$ le périmètre d'un polygone P et $\mathcal{A}(P)$ son aire.

• On dira que des triangles ABC et $A'B'C'$ sont super-semblables s'il existe une similitude qui transforme respectivement A en A', B en B' et C en C'.

• On rappelle qu'un quadrilatère est croisé s'il possède au moins deux côtés non consécutifs qui ont un point commun.

• On dira qu'un polygone est convexe si ses sommets sont dans un même demi-plan par rapport à n'importe quel côté du polygone.

Dans tout le problème, il sera possible d'affirmer *sans démonstration rigoureuse* qu'un polygone est convexe ou non, en se fiant à la configuration géométrique étudiée.

Partie A - Résultat préliminaire

Dans cette partie, nous établissons le résultat suivant : « parmi tous les triangles dont on fixe le périmètre et un côté, celui qui a la plus grande aire est le triangle isocèle ».

On considère trois points A, B et C non alignés du plan affine euclidien. On note α, β, γ les mesures respectives des angles géométriques $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ et on pose $x = BC$, $y = AC$, $c = AB$.

On note S l'aire du triangle ABC et p son périmètre. On fixe dans cette partie la base AB et le périmètre p.

1. Montrer que l'on a $y^2 = c^2 + x^2 - 2cx\cos\beta$. Cette relation est connue sous le nom de théorème d'Al-Kashi.

2. En déduire que :

$$\sin\beta = \frac{1}{2cx}\sqrt{((c+x)^2 - y^2)(y^2 - (c-x)^2)}.$$

3. Montrer que $S = \dfrac{cx\sin\beta}{2}$.

4. En déduire la formule de Héron :

$$S = \sqrt{\frac{p}{2}(\frac{p}{2} - c)(\frac{p}{2} - x)(\frac{p}{2} - y)}.$$

5. Montrer que S^2 s'exprime sous la forme $S^2 = k(m - x)(c + x - m)$, où k et m sont des constantes que l'on déterminera en fonction de c et p. Prouver que la constante k est strictement positive.

6. Montrer que S^2 atteint un maximum pour une valeur de x que l'on déterminera en fonction de c et p.

7. En déduire que le triangle d'aire maximale est le triangle isocèle.

Partie B - Cas de polygones particuliers

I. **Les triangles**

1. Calculer l'aire d'un triangle équilatéral en fonction de son périmètre p.

2. On considère un triangle ABC de périmètre donné p et qui serait d'aire maximale parmi tous les triangles de même périmètre p.

2.1. On suppose dans cette question que $BC \neq AC$. Montrer que l'on peut construire un triangle ABC' de périmètre p et d'aire plus grande que celle de ABC.

2. 2. En déduire que ABC est un triangle équilatéral.

3. Montrer que tous les triangles ayant un périmètre p et une aire S vérifient l'inégalité isopérimétrique suivante :

$$S \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}.$$

Conclure.

II. Les quadrilatères

On considère un quadrilatère *non croisé* $ABCD$ de périmètre fixé p et qui serait d'aire maximale parmi tous les quadrilatères non croisés de même périmètre p.

1. Montrer par l'absurde que $ABCD$ est un quadrilatère convexe (quitte à effectuer une permutation circulaire des points A, B, C et D on pourra supposer que le point A est à l'intérieur du triangle BCD et on pourra construire à partir de $ABCD$ un quadrilatère non croisé de même périmètre et d'aire plus grande).

2. On suppose dans cette question que $AB \neq BC$. Prouver que l'on peut construire un quadrilatère non croisé de même périmètre que $ABCD$ et d'aire plus grande.

3. En déduire que $ABCD$ est un losange.

4. On note $\alpha = \widehat{BAD}$. Calculer l'aire du losange $ABCD$ en fonction de p et de α.

5. Pour quelle valeur de α cette aire est-elle maximale ?

6. En déduire que $ABCD$ est un carré.

7. Montrer que tous les quadrilatères non croisés ayant un périmètre p et une aire S vérifient l'inégalité isopérimétrique suivante :

$$S \leq \frac{p^2}{16}.$$

Conclure.

Partie C - Polygones ayant plus de quatre côtés

I. Résultat auxiliaire

On suppose que le triangle ABC est rectangle en A et que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont super-semblables. Montrer que l'on a :

$$BC \times B'C' = AB \times A'B' + AC \times A'C'.$$

II. Cas des polygones à n côtés

Dans cette partie, n est un entier fixé strictement plus grand que 4, et on considère des polygones convexes ayant n côtés. On suppose que trois sommets consécutifs ne sont pas alignés.

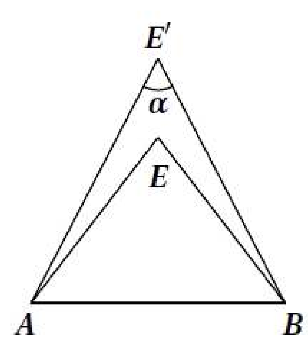
On appelle angle interne d'un polygone convexe tout angle géométrique saillant formé par un sommet du polygone et délimité par les deux côtés du polygone issus de ce sommet.

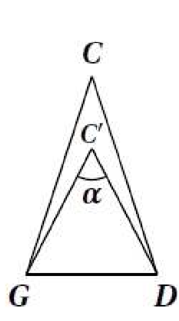
On considère un polygone P convexe ayant n côtés de périmètre fixé p et qui serait d'aire maximale parmi tous les polygones convexes ayant n côtés de même périmètre p. On note dans la suite A_1, A_2, ..., A_n les n sommets consécutifs du polygone P.

1. Supposons que $A_1A_2 \neq A_2A_3$. Prouver que l'on peut construire un polygone P' convexe ayant n côtés de périmètre p et d'aire supérieure à celle de P.

2. En déduire que tous les côtés de P sont de même longueur.

On admet *dans cette partie* le résultat suivant, dû à Zénodore (mathématicien grec du IIe siècle avant J.-C.).





A partir de deux triangles isocèles AEB et GCD tels que $AE = EB = GC = CD$, on peut construire deux autres triangles $AE'B$ et $GC'D$ qui vérifient les conditions suivantes :

- $AE'B$ et $GC'D$ sont isocèles et semblables,
- $\mathcal{P}(AEB) + \mathcal{P}(GCD) = \mathcal{P}(AE'B) + \mathcal{P}(GC'D)$,
- $\mathcal{A}(AEG) + \mathcal{A}(GCD) < \mathcal{A}(AE'G) + \mathcal{A}(GC'D)$.

Ce résultat sera démontré dans la partie III qui suit.

3. Supposons qu'il existe deux angles internes de P non consécutifs qui soient de mesure différente. En utilisant le résultat de Zénodore admis précédemment, montrer que l'on peut construire un polygone P' de même périmètre que celui de P et d'aire plus grande.

4. Montrer que P est un polygone régulier (on distinguera les cas où n est impair ou pair).

5. Montrer que tous les polygones convexes ayant un périmètre p et une aire S vérifient l'inégalité isopérimétrique suivante :

$$S \leq \frac{p^2}{4n \tan \dfrac{\pi}{n}}.$$

Conclure.

III. Démonstration du résultat de Zénodore

On considère deux triangles isocèles non plats AEB et GCD tels que :

$$AE = EB = GC = CD,$$

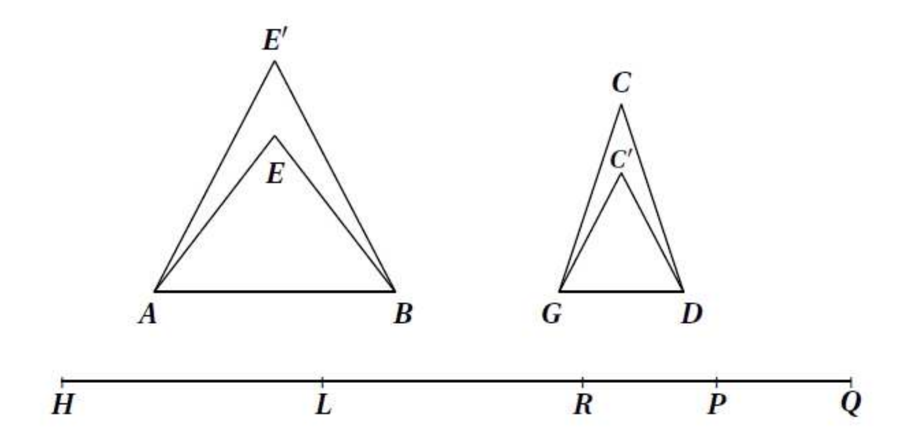
et on introduit deux points H et Q du plan tels que :

$$HQ = AE + EB + GC + CD = 4\,AE.$$

Soit R le point de $[HQ]$ défini par $\dfrac{HR}{RQ} = \dfrac{AB}{GD}$.

Soit L le milieu de $[HR]$ et P celui de $[RQ]$.

On suppose, sans restreindre la généralité que $AB > GD$.



1. Montrer que $HR + RQ > AB + GD$.

2. En multipliant chaque membre de l'inégalité précédente par GD, montrer que $RQ > GD$. En déduire que $HR > AB$.

On construit deux triangles $AE'B$ et $GC'D$ tels que :

$$AE' = E'B = HL = LR \quad \text{et} \quad GC' = C'D = RP = PQ$$

(voir figure).

3. Montrer que $AE' + E'B > \dfrac{HQ}{2}$ et $GC' + C'D < \dfrac{HQ}{2}$.

4. Montrer que les triangles $AE'B$ et $GC'D$ sont super-semblables.

5. Montrer que la somme des périmètres de AEB et GCD est égale à la somme des périmètres de $AE'B$ et $GC'D$.

6.

6.1. Montrer que $HR > \dfrac{HQ}{2}$.

6.2. En déduire que $AE' > AE$. On admet que, par une démarche analogue, on peut montrer que $GC' < GC$.

7. Quitte à déplacer sans déformer le triangle GCD, on peut supposer sans restreindre la généralité que l'on se trouve dans la situation de la FIG. 2.1. On note dans la suite K le milieu de $[AG]$, T celui de $[GD]$ et N le symétrique

de C par rapport à T.

7.1. Montrer que (EE') est la médiatrice de $[AG]$ et que (CC') est la médiatrice de $[GD]$.

7.2. Montrer que $E'K > EK$ et que $C'T < CT$.

7.3. Comparer les angles $\widehat{CGD}$ et $\widehat{EGA}$ et montrer que $\widehat{NGT} > \widehat{EGA}$.

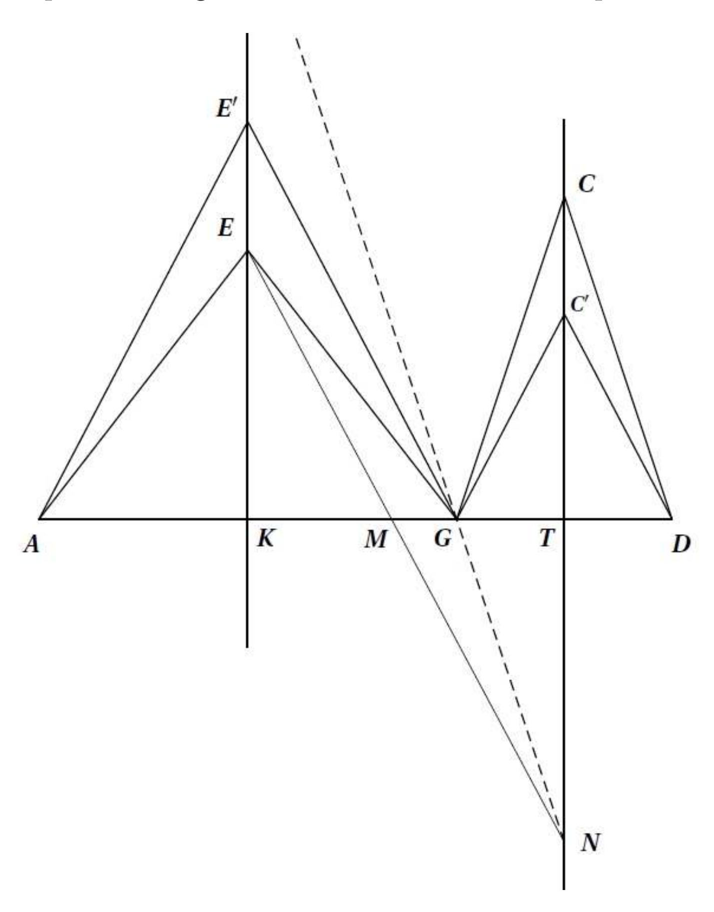


Fig. 2.1 – Figure des questions III.7.

On admet qu'alors la droite (NE) coupe $[GK]$ en un point distinct de G que l'on notera M.

7.4. Montrer que les triangles rectangles $E'GK$ et $C'GT$ sont supersemblables. En déduire que $E'G.GC' - E'K.C'T - KG.TG = 0$.

7.5. En utilisant la question C.III.5, montrer que $E'G + GC' > EN$.

7.6.1. Montrer que :

$$(E'G + GC')^2 = E'K^2 + KG^2 + GT^2 + C'T^2 + 2\,E'G.GC'.$$

7.6.2. En utilisant la question 7.4, montrer que :

$$(E'G + GC')^2 = \left(C'T + E'K\right)^2 + TK^2.$$

Nous admettrons le résultat suivant : $EN^2 = (EK + TN)^2 + TK^2$ (qui pourrait être démontré par une démarche analogue en introduisant le point M).

7.7.1. Montrer que l'on a $C'T + E'K > EK + TN$.

7.7.2. En déduire $EE' > C'C$.

7.8. Montrer que l'aire du quadrilatère $AE'GE$ est strictement plus grande que celle du quadrilatère $DCGC'$.

7.9. Enfin, montrer que $\mathcal{A}\,(AEG) + \mathcal{A}\,(GCD) < \mathcal{A}\,(AE'G) + \mathcal{A}\,(GC'D)$.

2.2 Corrigé

PROBLEME I : ANALYSE

Partie I - Inégalité des accroissements finis

I.1. Les applications φ et ψ sont définies et dérivables sur I, et pour tout $x \in I$, $\varphi'(x) = g'(x) - m \geq 0$ et $\psi'(x) = g'(x) - M \leq 0$. On en déduit que φ est croissante sur I et que ψ est décroissante sur ce même intervalle.

I.2. $\varphi(a) = 0$ et φ est croissante sur I, donc

$$a \leq b \;\Rightarrow\; 0 \leq \varphi(b) \;\Leftrightarrow\; m(b-a) \leq g(b) - g(a).$$

De même $\psi(a) = 0$ et ψ est décroissante sur I, donc

$$a \leq b \;\Rightarrow\; \psi(b) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; g(b) - g(a) \leq M(b-a).$$

Partie II - Etude d'une fonction gaussienne et de sa courbe représentative

II.1. $f(-x) = e^{-(-x)^2/2} = e^{-x^2/2} = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est paire. Pour étudier f, il suffit donc d'étudier ses variations quand x décrit $[0, +\infty[$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = -xe^{-x^2/2} < 0.$$

[0] [ag79] v1.00

f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

II.2. Comme $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0_+$, on peut rassembler ces résultats dans le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0_+	$\nearrow$	1	$\searrow$	0_+

II.3.1. On vient de voir que $f'(x) = -xe^{-x^2/2} = -xf(x)$, donc f est solution de l'équation différentielle $y' + xy = 0$.

II.3.2. Comme $f'(x) = -xf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, f' est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. C'est donc aussi une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -f(x) - xf'(x) \\ &= -f(x) + x^2 f(x) \\ &= (x^2-1)f(x)\,. \end{aligned}$$

II.3.3. Comme f est strictement positive, le signe de $f''(x)$ sera celui de x^2-1. $f''(x)$ sera donc positive si x n'appartient pas à l'intervalle $[-1,1]$, et négative si x appartient à $]-1,1[$.
Comme la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire, f' est impaire et il suffit d'étudier ses variations sur $\mathbb{R}_+$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1/2}$	$\nearrow$	0_-

et le graphique de la FIG. 2.2.

II.4. Dans la question précédente, on a vu que $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Par ailleurs, si $x \in [0,1]$,

$$f''(x) = (x^2-1)f(x) = x^2 f(x) - f(x) \geq -1$$

puisque f est positive sur $\mathbb{R}$ et $f(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (d'après les variations de f étudiées en II.2). Donc :

$$\forall x \in [0,1] \quad -1 \leq f''(x) \leq 0.$$

II.5. • Si $0 \leq a \leq b \leq 1$, f' est décroissante sur $[0,1]$, donc aussi sur $[a,b]$, et $M = f'(a)$ est un majorant de f' sur $[a,b]$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis (démontrée à la question I.2), on obtient :

$$f(b) - f(a) \leq f'(a)\,(b-a)\,.$$

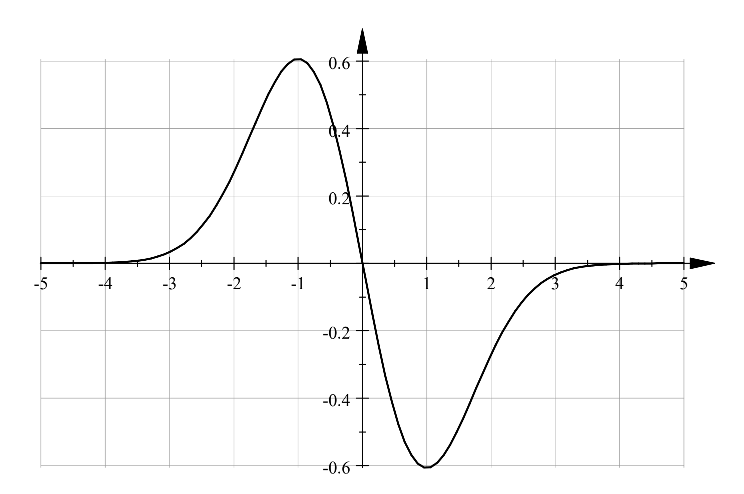


FIG. 2.2 – Fonction $x \mapsto f'(x) = -xe^{-x^2/2}$

De même $m = f'(b)$ est un minorant de f' sur $[a, b]$, et la question I.2 donne :

$$f'(b)(b-a) \leq f(b) - f(a).$$

• Le cas où $1 \leq a \leq b$ se traite de la même façon, en remarquant que cette fois-ci f' est croissante sur $[1, +\infty[$. En prenant maintenant $m = f'(a)$ et $M = f'(b)$, la question I.2 donne $f'(a)(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(b)(b-a)$.

II.6.1. Une équation de la tangente T_a étant $y - f(a) = f'(a)(x-a)$, on obtient $u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$.

II.6.2. Si $a \in]0, 1[$ et $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} f(x) \leq u(x) &\Leftrightarrow f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a) \\ &\Leftrightarrow f(x) - f(a) \leq f'(a)(x-a) \end{aligned}$$

et la dernière affirmation écrite est vraie d'après la question I.5. Nous venons de démontrer que la courbe représentative de $f|_{[0,1]}$ était située sous n'importe laquelle de ses tangentes issues d'un point $(a, f(a))$ lorsque $a \in]0, 1[$.

II.6.3. Ici $a > 1$ et $x \in [1, +\infty[$, et

$$\begin{aligned} f(x) \geq u(x) &\Leftrightarrow f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a) \\ &\Leftrightarrow f(x) - f(a) \geq f'(a)(x-a). \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vraie en vertu de la question I.5. Le graphe de la restriction $f|_{[1,+\infty[}$ de f à $[1, +\infty[$ sera donc toujours situé au-dessus de la tangente T_a.

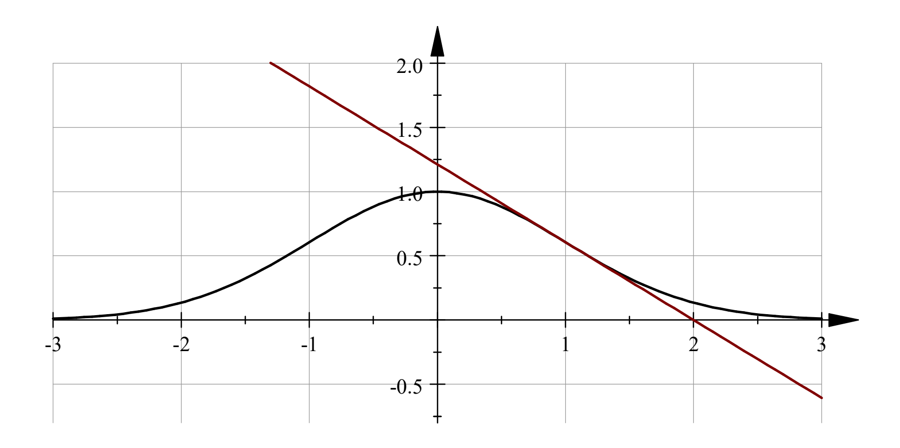


FIG. 2.3 – Graphe de $f(x) = e^{-x^2/2}$ et tangente en $x = 1$

II.6.4. Si $a = 1$, posons

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - u(x) \\ &= f(x) - f'(1)(x-1) - f(1) \\ &= f(x) + e^{-1/2}(x-1) - e^{-1/2} \\ &= f(x) + e^{-1/2}(x-2). \end{aligned}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$, $g(1) = f(1) - u(1) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = f'(x) + e^{-1/2} \geq 0$$

d'après le tableau de variations de la question I.3.3. Mieux, ce tableau de variations montre que g' décroît strictement sur $[0,1]$, puis croît strictement sur $[1,+\infty[$, de sorte que g' ne s'annule qu'en 1. On en déduit le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$e^{-1/2}$	$\searrow$ $+$	0	$\nearrow$ $+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$g(0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

où $g(0) = 1 - 2e^{-1/2}$. Ce tableau montre que :

- $g \leq 0$ sur $]-\infty,1]$ et la courbe de f est au-dessous de T_1 si $x \in]-\infty,1]$;
- $g \geq 0$ sur $[1,+\infty[$ et la courbe de f est au-dessus de T_1 si $x \in [1,+\infty[$.

La courbe représentative de f traverse donc sa tangente au point d'abscisse 1, et ce point est un point d'inflexion de la courbe (FIG. 2.3).

Remarque : On peut retrouver les points d'inflexion de f en cherchant où la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe. D'après I.3.3, f'' s'annule en changeant de signe en ± 1, donc la courbe de f admet deux points d'inflexion : les points d'abscisses ± 1.

II.7.1. La sécante $D_{a,b}$ a pour équation

$$y - a = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

donc

$$v(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + a.$$

II.7.2.1. La fonction $f - v$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ (et même sur tout $\mathbb{R}$), et s'annule en a et b. Le Théorème de Rolle s'applique : il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) - v'(c) = 0$.

II.7.2.2. Posons $h(x) = f(x) - v(x)$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{cases} h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ h''(x) = f''(x). \end{cases}$$

Comme $h''(x) = f''(x) = (x^2 - 1)f(x) \leq 0$ sur $[a, b]$ (car $x^2 - 1 \leq 0$ sur $[a, b]$ et compte tenu de la question II.2.2), et même strictement négative quand $x \in [a, b] \setminus \{\pm 1\}$ (question II.3.3), h' est strictement décroissante sur $[a, b]$. Comme h' s'annule en c (question II.7.2.1), on obtient le tableau de variations suivant :

x	0	a		c		b	1
$h''(x)$		|		$-$		|	
$h'(x)$		|	$\searrow$ $+$	0	$\searrow$ $-$	|	
$h(x)$		0	$\nearrow$	|	$\searrow$	0	

Ce tableau montre que $h(x) = f(x) - v(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$. On interprète les inégalités $f(x) \geq v(x)$ en disant que, entre a et b, la courbe représentative de f est située au-dessus de la sécante $D_{a,b}$.

II.7.2.3. Si $1 \leq a < b$, on pose encore $h(x) = f(x) - v(x)$, et l'on démontre en utilisant le Théorème de Rolle comme à la question II.7.2.1 qu'il existe

$c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = f'(c) - v'(c) = 0$. On obtient le tableau :

x	1	a		c		b	$+\infty$
$h''(x)$		$\vert$		$+$		$\vert$	
$h'(x)$		$\vert$	$\nearrow$ $-$	0	$\nearrow$ $+$	$\vert$	
$h(x)$		0	$\searrow$	$\vert$	$\nearrow$	0	

de sorte que :

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq v(x).$$

Cette fois-ci la courbe de f est sous la sécante $D_{a,b}$ quand $a \leq x \leq b$.

Remarque : Les conclusions de cette question et de la précédente sont normales puisque f est concave sur $[-1, 1]$ et convexe sur $[1, +\infty[$. Le point du graphe de f d'abscisse 1 joue un rôle particulier dans l'étude de la concavité du graphe puisque, comme on l'a déjà vu, il s'agit d'un point d'inflexion.

II.8. Voir FIG. 2.4.

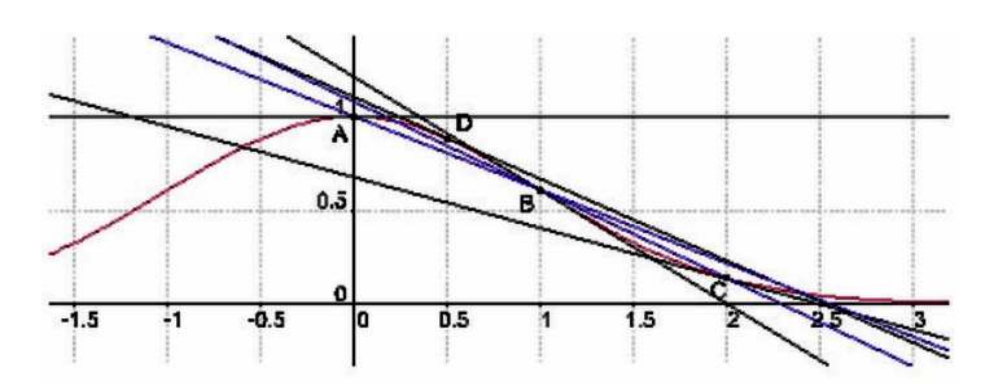


FIG. 2.4 – Question II.8

Partie III - Table de la loi centrée réduite

III.1. *[Je noterai p la probabilité définie dans l'énoncé, car le symbole $\mathbb{P}$ doit être réservé pour désigner des ensembles (comme l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ ou celui des entiers relatifs $\mathbb{Z}$). D'ailleurs $\mathbb{P}(E)$ désigne habituellement l'espace projectif associé à un espace vectoriel E.]*

La fonction f étant paire, on aura

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, dt$$

donc

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 2\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt = 2\sqrt{2\pi} \times p(]-\infty, 0])$$

et $p(]-\infty,0]) = \dfrac{1}{2}$.

III.2. En utilisant la relation de Chasles pour les intégrales,

$$\begin{aligned} A = \int_0^1 f(t)\ dt &= \int_{-\infty}^{1} f(t)\ dt - \int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt \\ &= \sqrt{2\pi}\, p(]-\infty,1]) - \sqrt{2\pi}\, p(]-\infty,0]) \\ &= \sqrt{2\pi}\, p(]-\infty,1]) - \frac{\sqrt{2\pi}}{2}. \end{aligned}$$

III.3. Une calculatrice donne $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \simeq 1,253\,314$ et

$$A \simeq \sqrt{2\pi} \times 0,84133 - 1,253\,314 \simeq 0,855\,587\,6 \simeq 0,856$$

à 10^{-3} près.

Partie IV - Approximation par une somme d'aires de rectangles

IV.1.1. f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc si $1 \leq k \leq n$, $0 \leq \frac{k-1}{n} \leq t \leq \frac{k}{n} \leq 1$ entraîne :

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

IV.1.2. En intégrant les inégalités précédentes, on obtient :

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dt \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\ dt \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) dt$$

soit :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\ dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

IV.2. En additionnant les inégalités précédentes, on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f(t)\ dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

Comme

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= f(0) + \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - f(1) \ = \ nu_n + 1 - e^{-1/2},\end{aligned}$$

on obtient :

$$u_n \leq A \leq \frac{1}{n} + u_n - \frac{1}{n\sqrt{e}}.$$

IV.3.1. Les inégalités précédentes s'écrivent :

$$A - \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{e}} \leq u_n \leq A.$$

IV.1.2. L'encadrement de u_n obtenu à la question précédente permet d'appliquer le Théorème des gendarmes : comme $\lim \left(A - 1/n + 1/n\sqrt{e}\right) = A$, on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que $\lim_{n \to +\infty} u_n = A$.

Remarque : On a remontré ici, dans le cas particulier d'une fonction f décroissante, le résultat classique[1] plus général de convergence des suites de Riemann (ou de Darboux) vers l'intégrale (d'une fonction intégrable au sens de Riemann).
$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann de f associée à la subdivision 0, $1/n$, $2/n$, ..., 1 de l'intervalle $[0, 1]$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, et l'on sait que les sommes de Riemann de f sur $[0, 1]$ convergent vers l'intégrale de f sur $[0, 1]$ quand le pas des subdivisions (ici $1/n$) tend vers 0. Ici, cela démontre un nouvelle fois (en utilisant un résultat de cours) la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et l'égalité :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

IV.4. u_n est une valeur approchée par défaut de A à 10^{-2} près si et seulement si $u_n \leq A$ et $A - u_n \leq 10^{-2}$. D'après (IV.2), $A - u_n \leq 1/n - 1/n\sqrt{e}$. On aura donc $A - u_n \leq 10^{-2}$ si l'on a

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n\sqrt{e}} \leq 10^{-2}$$

[1] Les définitions usuelles (et à connaître) de l'intégrale de Riemann sont rassemblées dans la Section 13.3.1 de [1] avec ce qu'il faut bien retenir sur l'intégrale pour passer les concours.

donc si

$$n \geq 100\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \simeq 39,347.$$

On peut donc choisir pour n n'importe quel entier supérieur ou égal à 40.

Remarque : Un calcul sur machine donne

$$u_{40} = \frac{1}{40}\sum_{k=1}^{40} f\left(\frac{k}{40}\right) \simeq 0,850\,674\,4$$

ce qui nous interpelle puisqu'à la question (III.3) nous avions trouvé $0,856$ pour valeur approchée de A à 10^{-3} près. Manquerait-il des millièmes ? En fait, il ne faut pas s'inquiéter puisque l'on nous a seulement demandé une approximation par défaut à 10^{-2} près, et que nous avons seulement répondu qu'à partir du rang 40, u_n pouvait nous fournir cette approximation par défaut : ici, on trouve $0,85$; et les chiffres qui suivent ne sont pas garantis !
On le vérifie en utilisant à nouveau une machine pour calculer u_{1000}, ce qui nous rassure :

$$u_{1000} = \frac{1}{1000}\sum_{k=1}^{1000} f\left(\frac{k}{1000}\right) = 0,855\,427\,6.$$

Partie V - Approximation par une somme d'aires de trapèzes

V.1. Comme on l'a montré aux questions II.6.2 et II.7.2, si $0 \leq a < b \leq 1$, la partie de la courbe Γ située entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ se trouve en dessous de la tangente $T_{(a+b)/2}$ au point d'abscisse $(a+b)/2$, et au-dessus de la sécante $D_{a,b}$.

Remarque : Cela traduit la concavité de f sur $[0,1]$. La leçon d'oral sur les fonctions convexes proposée au chapitre 13 de [3] permet de faire le point sur cette notion. On y démontre qu'une fonction est convexe sur un intervalle I si et seulement si sa courbe représentative prise entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (où $a, b \in I$) est située sous la corde $D_{a,b}$ (Théorème 194), et que, lorsque f est dérivable sur I, cela revient à dire que cette courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes (Théorème 201).

V.2. La FIG. 2.5 donne l'idée de la preuve : l'aire sous la courbe Γ, entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, est comprise entre l'aire $\mathcal{A}_1$ du trapèze $ABCD$ et l'aire $\mathcal{A}_2$ du trapèze $ABEF$, où C et D sont les points de Γ d'abscisses a et b, et où E et F sont les intersections de Γ et de la tangente à Γ issue du point de Γ d'abscisse $(a+b)/2$.

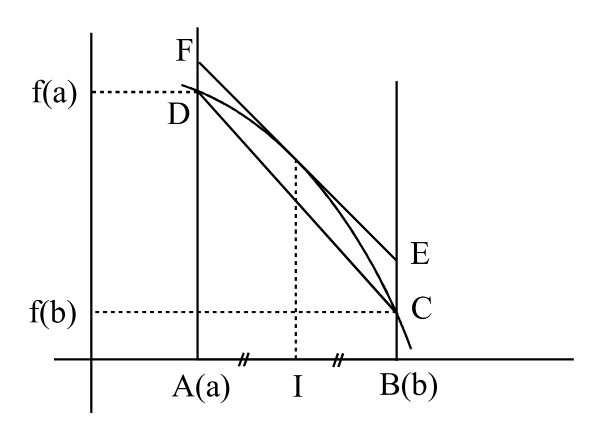


FIG. 2.5 – Deux trapèzes $ABCD$ et $ABEF$

Autrement dit :

$$\mathcal{A}_1 \leq \int_a^b f(t)\ dt \leq \mathcal{A}_2. \quad (*)$$

L'aire du trapèze $ABCD$ est égale au produit de la hauteur AB par la demi-somme des bases BC et AD, soit :

$$\mathcal{A}_1 = AB \times \frac{BC + AD}{2} = (b-a)\,\frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

De même

$$\mathcal{A}_2 = AB \times \frac{BE + AF}{2},$$

et comme la tangente (EF) admet l'équation

$$y - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \xi\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \quad \text{où } \xi = f'\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

on trouve :

$$\begin{aligned} BE + AF &= \left[\xi\left(b - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] + \left[\xi\left(a - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\ &= 2f\left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

En remplaçant :

$$\mathcal{A}_2 = (b-a)\ f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

et les inégalités $(*)$ s'écrivent :

$$(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(t)\ dt \leq (b-a)\ f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Remarque : Il n'est pas nécessaire d'imaginer des trapèzes et de calculer leurs aires pour répondre à cette question. Il suffit de connaître les équations de la sécante $D_{a,b}$ et de la tangente $T_{(a+b)/2}$, et d'appliquer V.1. On a :

$$D_{a,b}:\quad y=\Delta(x-a)+f(a) \qquad \text{où } \Delta=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$T_{(a+b)/2}:\quad y=\xi\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad \text{où } \xi=f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Comme Γ est au-dessus de la sécante,

$$\int_a^b (\Delta(t-a)+f(a))\,dt \leq \int_a^b f(t)\ dt$$

$$\left[\Delta\frac{(t-a)^2}{2}+f(a)\,t\right]_{t=a}^{b} \leq \int_a^b f(t)\ dt$$

$$\Delta\frac{(b-a)^2}{2}+f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(t)\ dt$$

et l'on retrouve bien :

$$(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(t)\ dt.$$

Comme Γ est au-dessous de la tangente,

$$\int_a^b f(t)\ dt \leq \int_a^b \left(\xi\left(t-\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\ dt$$

$$\int_a^b f(t)\ dt \leq \left[\frac{\xi}{2}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2+f\left(\frac{a+b}{2}\right)t\right]_{t=a}^{b}$$

et l'on retrouve la deuxième inégalité :

$$\int_a^b f(t)\ dt \leq (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

V.3. On considère un entier k entre 1 et n, et on écrit les inégalités de la question précédente avec $a = (k-1)/n$ et $b = k/n$. On trouve :

$$\frac{1}{2n}\left(f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right).$$

En sommant ces inégalités membre à membre pour k variant de 1 à n, on obtient

$$\frac{1}{2n} f(0) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n} f(1) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$$

c'est-à-dire $v_n \leq A \leq w_n$.

V.4. On a :

$$v_3 = \frac{1}{6} f(0) + \frac{1}{3}\left(f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)\right) + \frac{1}{6} f(1),$$

$$w_3 = \frac{1}{3}\left(f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{3}{6}\right) + f\left(\frac{5}{6}\right)\right),$$

et une calculatrice donne :

$$\begin{cases} v_3 \simeq 0,849\,987\,400\,560\,0 \\ w_3 \simeq 0,858\,450\,765\,728\,7, \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$0,849 \leq v_3 \leq A \leq w_3 \leq 0,858.$$

Une valeur décimale approchée de A à 10^{-2} près sera $0,85$ puisque

$$|A - 0,85| \leq 0,858 - 0,849 = 0,009 \leq 10^{-2}.$$

Remarque : Tout nombre décimal $\widetilde{A}$ tel que $|A - \widetilde{A}| \leq 10^{-2}$ mérite d'être appelé *valeur décimale approchée de A à 10^{-2} près*. Il faut faire attention à ne pas répondre trop rapidement en tronquant $0,849$ pour obtenir $0,84$. En fait $0,84$ n'est pas *a priori* une valeur approchée de A à 10^{-2} près car tout ce que l'on sait, c'est que $0 \leq A - 0,84 \leq 0,858 - 0,84 = 0,018$, et que, lorsqu'on utilise l'encadrement $0,849 \leq A \leq 0,858$, rien ne nous permet d'affirmer que $0 \leq A - 0,84 \leq 0,01$.

V.5.1. Posons $c = (a+b)/2$ pour toute la suite du problème. En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_c^b (t-b) f''(t)\, dt &= \left[(t-b) f'(t)\right]_c^b - \int_c^b f'(t)\, dt \\ &= \frac{b-a}{2} f'(c) - f(b) + f(c) \end{aligned}$$

d'où

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_{(a+b)/2}^{b} (t-b) f''(t)\, dt.$$

V.5.2. On intègre encore par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^c (a-t) f''(t)\, dt &= \left[(a-t) f'(t)\right]_a^c + \int_a^c f'(t)\, dt \\ &= \frac{a-b}{2} f'(c) + f(c) - f(a)\end{aligned}$$

d'où

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^{(a+b)/2} (a-t) f''(t)\, dt.$$

V.5.3. D'après (II.4), $-1 \leq f''(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0,1]$.

- Si $t \in [c,b] \subset [0,1]$, alors $t - b \leq 0$ donc

$$-1 \leq f''(t) \leq 0 \;\Rightarrow\; 0 \leq (t-b) f''(t) \leq b - t.$$

- Si $t \in [a,c] \subset [0,1]$, alors $a - t \leq 0$ donc

$$-1 \leq f''(t) \leq 0 \;\Rightarrow\; 0 \leq (a-t) f''(t) \leq t - a.$$

V.5.4. Additionnons membre à membre les égalités des questions (V.5.1) et (V.5.2). On obtient :

$$f(a) + f(b) = 2f(c) - \int_c^b (t-b) f''(t)\, dt - \int_a^c (a-t) f''(t)\, dt$$

soit

$$2f(c) - (f(a) + f(b)) = \int_c^b (t-b) f''(t)\, dt + \int_a^c (a-t) f''(t)\, dt.$$

Les encadrements de (V.5.3) permettent alors d'écrire :

$$0 \leq 2f(c) - (f(a) + f(b)) \leq M \qquad (*)$$

où $M = \displaystyle\int_c^b (b-t)\, dt + \int_a^c (t-a)\, dt$ est facile à calculer :

$$\begin{aligned} M &= \left[bt - \frac{t^2}{2}\right]_c^b + \left[\frac{t^2}{2} - at\right]_a^c \\ &= b(b-c) - \frac{1}{2}\left(b^2 - c^2\right) + \frac{1}{2}\left(c^2 - a^2\right) - a(c-a) \\ &= (b-c)\left[b - \frac{1}{2}(b+c)\right] + (c-a)\left[\frac{1}{2}(c+a) - a\right]\end{aligned}$$

soit
$$M = \frac{b-a}{2}\left[b - \frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}(c+a) - a\right] = \frac{(b-a)^2}{4}.$$
En remplaçant dans $(*)$, on obtient bien :
$$0 \leq f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \frac{1}{8}(b-a)^2.$$

V.5.5. En faisant $a = (k-1)/n$ et $b = k/n$ dans les inégalités de la question précédente :
$$0 \leq f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{8n^2}.$$
En sommant ces inégalités pour k variant de 1 à n, on trouve :
$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{8n}.$$
On reconnaît les termes w_n et v_n des deux suites introduites plus haut :
$$0 \leq nw_n - nv_n \leq \frac{1}{8n},$$
et finalement :
$$0 \leq w_n - v_n \leq \frac{1}{8n^2}.$$

V.5.6. La question (V.3) montre que $v_n \leq A \leq w_n$. Par suite :
$$0 \leq A - v_n \leq w_n - v_n \leq \frac{1}{8n^2} \quad \text{et} \quad 0 \leq w_n - A \leq w_n - v_n \leq \frac{1}{8n^2}.$$
Comme $\lim(1/8n^2) = 0$, les termes des suites $(A - v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n - A)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont encadrés par les termes de deux suites $(0)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(1/8n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui tendent vers 0 quand n tend vers l'infini. Le Théorème des gendarmes montre que les suites $(A - v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n - A)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendent aussi vers 0. On a ainsi montré que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeaient vers A.

V.6.1. On intègre une première fois par parties :
$$\begin{aligned} I &= \int_a^b (t-a)(t-b) f''(t)\, dt \\ &= \left[(t-a)(t-b) f'(t)\right]_a^b - \int_a^b (t-b+t-a) f'(t)\, dt \\ &= \int_a^b (a+b-2t) f'(t)\, dt, \end{aligned}$$

puis une seconde fois :

$$\begin{aligned} I &= [(a+b-2t)\, f(t)]_a^b + 2\int_a^b f(t)\; dt \\ &= (a-b)\, f(b) - (b-a)\, f(a) + 2\int_a^b f(t)\; dt \\ &= -\left(f(a)+f(b)\right)(b-a) + 2\int_a^b f(t)\; dt. \end{aligned}$$

De sorte que :

$$\int_a^b f(t)\; dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b (t-a)(t-b)\, f''(t)\; dt.$$

V.6.2. D'après (II.4), $-1 \leq f''(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Si $t \in [a,b]$, alors $t \in [0,1]$ et $(t-a)(t-b) \leq 0$, et il suffit de multiplier tous les membres des inégalités $-1 \leq f''(t) \leq 0$ par $(t-a)(t-b)$ pour obtenir :

$$0 \leq (t-a)(t-b)\, f''(t) \leq (t-a)(b-t).$$

V.6.3. D'après (V.6.1) :

$$\int_a^b f(t)\; dt - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) = \frac{1}{2}\int_a^b (t-a)(t-b)\, f''(t)\; dt$$

et les inégalités de la question précédente montrent que :

$$0 \leq \int_a^b f(t)\; dt - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \leq \frac{1}{2}\int_a^b (t-a)(b-t)\; dt.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \int_a^b (t-a)(b-t)\; dt &= \int_a^b \left(-t^2 + (a+b)\, t - ab\right) dt \\ &= -\frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right) + \frac{a+b}{2}\left(b^2-a^2\right) - ab\,(b-a) \\ &= \frac{b-a}{6}\left(-2\left(b^2+ab+a^2\right) + 3\,(a+b)^2 - 6ab\right) \\ &= \frac{(b-a)^3}{6} \end{aligned}$$

et finalement :

$$0 \leq \int_a^b f(t)\; dt - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \leq \frac{(b-a)^3}{12}.$$

V.6.4. Faisons $a = (k-1)/n$ et $b = k/n$ dans les inégalités précédentes. On obtient :

$$0 \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,dt - \frac{1}{2n}\left(f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{12n^3}.$$

En faisant la somme de toutes ces inégalités pour k variant de 1 à n :

$$0 \leq A - v_n \leq \frac{1}{12n^2}.$$

V.6.5. v_n sera une valeur approchée de A à 10^{-3} près si $0 \leq A - v_n \leq 10^{-3}$, ce qui sera assuré à partir du moment où

$$\frac{1}{12n^2} \leq 10^{-3}$$

c'est-à-dire dès que

$$n \geq \sqrt{\frac{10^3}{12}} \simeq 9,13.$$

On répondra donc à la question à partir de $n = 10$.

V.6.6. On pose $p = 10$. Une machine donne :

$$v_{10} = \frac{1}{20} f(0) + \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{9} f\left(\frac{k}{10}\right) + \frac{1}{20} f(1) \simeq 0,855\,118\,781\,074\,5.$$

On en déduit que $0,855$ et $0,856$ sont deux valeurs approchées de A à 10^{-3} près, ce qui est en accord avec la valeur $0,856$ obtenue à la question (III.3).

PROBLEME II : GEOMETRIE

Partie A - Résultat préliminaire

A.1. Développons un produit scalaire :

$$\begin{aligned} y^2 = \overrightarrow{AC}^2 &= (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})^2 \\ &= BC^2 + BA^2 - 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} \\ &= c^2 + x^2 - 2cx\cos\beta. \end{aligned}$$

A.2. En utilisant la formule que l'on vient de démontrer :

$$\begin{aligned}\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta &= 1-\left(\frac{c^2+x^2-y^2}{2cx}\right)^2\\ &= \frac{1}{4c^2x^2}\left[4c^2x^2-(c^2+x^2-y^2)^2\right]\\ &= \frac{1}{4c^2x^2}(2cx+c^2+x^2-y^2)(2cx-c^2-x^2+y^2)\\ &= \frac{1}{4c^2x^2}((c+x)^2-y^2)(y^2-(c-x)^2).\end{aligned}$$

Comme $\beta\in]0,\pi[$, $\sin\beta$ est positif donc :

$$\sin\beta = \frac{1}{2cx}\sqrt{((c+x)^2-y^2)(y^2-(c-x)^2)}.$$

A.3. Si H désigne le pied de la hauteur issue de C, $CH = BC\sin\beta = x\sin\beta$ et

$$S = \frac{AB\times CH}{2} = \frac{cx\sin\beta}{2}.$$

A.4. De ce qui précède, on tire :

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{4}\sqrt{((c+x)^2-y^2)(y^2-(c-x)^2)}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(c+x-y)(c+x+y)(y-c+x)(y+c-x)}.\end{aligned}$$

Comme $x+y+c=p$,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{4}\sqrt{(p-2y)p(p-2c)(p-2x)}\\ &= \sqrt{\frac{p}{2}(\frac{p}{2}-c)(\frac{p}{2}-x)(\frac{p}{2}-y)}.\end{aligned}$$

A.5. Comme $y=p-x-c$, la formule précédente donne :

$$S^2 = \frac{p}{2}(\frac{p}{2}-c)(\frac{p}{2}-x)(x+c-\frac{p}{2}).$$

En posant $m=p/2$ et $k=m\,(m-c)$, on obtient $S^2=k(m-x)(c+x-m)$. La constante $k=m\,(m-c)$ est strictement positive comme produit de deux nombres strictement positifs. En effet $m>0$ et

$$m-c = \frac{x+y-c}{2} > 0$$

puisque $x+y-c>0$ (on applique une inégalité triangulaire stricte dans le triangle ABC non aplati).

A.6. Posons $f(x) = S^2 = k(m-x)(c+x-m)$. On définit ainsi une fonction dérivable sur tout $\mathbb{R}$, et le nombre dérivé de f en x est

$$f'(x) = k\left[-(c+x-m)+(m-x)\right] = k(2m-2x-c).$$

Ainsi $f'(x)$ s'annule en changeant de signe lorsque $2m-2x-c=0$, c'est-à-dire lorsque

$$x = m - \frac{c}{2}.$$

$f'(x)$ est positive si $x < m - c/2$, négative sinon, de sorte que f admette un maximum global en $x = m - c/2$.

A.7. L'aire du triangle ABC est donc maximale si et seulement si

$$x = m - \frac{c}{2} = \frac{x+y+c}{2} - \frac{c}{2} = \frac{x+y}{2}$$

donc lorsque $2x = x+y$, c'est-à-dire $x = y$. Dans ce cas, ABC est un triangle isocèle en C.

Partie B - Cas de polygones particuliers

B.I.1. Soit H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle équilatéral ABC. On a $CH = BC\sin(\pi/3)$, et $AB = BC = CA = p/3$, donc :

$$S = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{p^2\sqrt{3}}{36} = \frac{p^2}{12\sqrt{3}}.$$

B.I.2.1. D'après (A.7), il existe C' tel que ABC' soit un triangle isocèle de périmètre p et d'aire plus grande que celle de ABC.

B.I.2.2. D'après la question précédente, si ABC est d'aire maximale et si $BC \neq AC$, alors il existe C' tel que ABC' soit un triangle d'aire strictement plus grande que celle de ABC, et toujours de même périmètre. C'est impossible, donc ABC doit être isocèle en C.
On montrerait de la même manière que ABC doit être isocèle en B. Finalement, ABC sera équilatéral.

B.I.3. D'après (B.1) et (B.2), tous les triangles de périmètre p auront une aire S telle que :

$$S \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}.$$

B.II.1. Sur la FIG. 2.6, on a dessiné le symétrique A' de A par rapport à la droite (BD). Une réflexion conserve les distances, donc les périmètres des

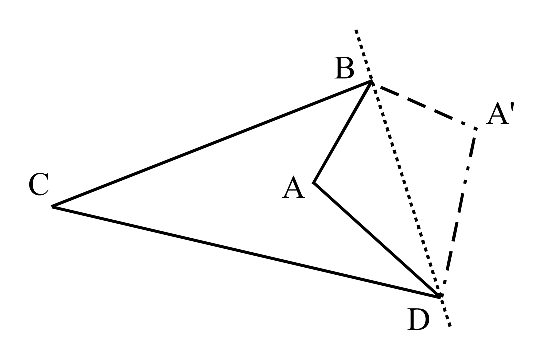


FIG. 2.6 – Question B.II.1.

quadrilatères $ABCD$ et $A'BCD$ sont identiques, et le quadrilatère $A'BCD$ a le bon goût d'être convexe. Son aire étant manifestement plus grande que celle du quadrilatère $ABCD$, on vient de construire un quadrilatère convexe de même périmètre que celui de $ABCD$ et d'aire plus grande. C'est absurde. Donc $ABCD$ est convexe.

B.II.2. Sur la FIG. 2.7 on a tracé B' tel que le triangle $AB'C$ ait même périmètre que le triangle ABC, mais soit d'aire maximale dans l'ensemble des triangles de côté AC et de périmètre donné. On sait qu'un tel point B' existe, et que $AB'C$ est alors isocèle en B' (question A.7). On s'arrange aussi pour que B' n'appartiennent pas au demi-plan de frontière (AC) contenant D, de sorte que le quadrilatère $AB'CD$ reste convexe.
En conclusion : les quadrilatères $ABCD$ et $AB'CD$ sont convexes, ont même périmètre, et l'aire de $AB'CD$ est plus grande que celle de $ABCD$.

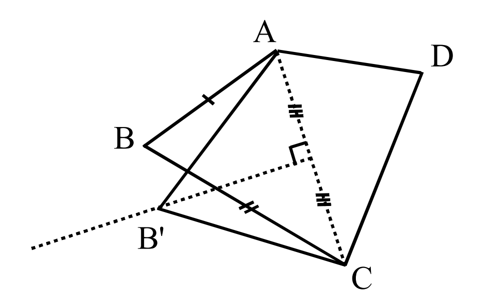


FIG. 2.7 – Question B.II.2.

B.II.3. Si $ABCD$ était tel que $AB \neq BC$, la question précédente montrerait

que l'on est capable de construire un quadrilatère convexe de même périmètre et d'aire strictement plus grande que celle de $ABCD$. C'est absurde, donc $AB = BC$. On montrerait de la même façon que $BC = CD$ et $CD = DA$. Le quadrilatère $ABCD$ possède donc quatre côtés égaux : c'est un losange.

B.II.4. Notons I l'intersection des diagonales du losange $ABCD$. Les relations trigonométriques dans le triangle rectangle ABI donnent :

$$BI = AB \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{4}\sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad AI = AB\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{4}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

L'aire du losange $ABCD$ est donc :

$$\mathcal{A}\,(ABCD) = \frac{1}{2}\,BD \times AC = 2\,BI \times AI = \frac{p^2}{16}\sin\alpha.$$

B.II.5. Cette aire est maximale si et seulement si $\sin\alpha = 1$, autrement dit si $\alpha = \pi/2$.

B.II.6. Un losange qui possède un angle droit est un carré, donc $ABCD$ est un carré.

B.II.7. Les questions précédentes montrent que l'aire S d'un quadrilatère de périmètre p est toujours inférieure à l'aire d'un carré de côté $p/4$, soit :

$$S \leq \frac{p^2}{16}.$$

Partie C - Polygones ayant plus de quatre côtés

C.I. Si k désigne le rapport de la similitude qui transforme A, B, C respectivement en A', B', C', alors $B'C' = kBC$, $A'B' = kAB$ et $A'C' = kAC$. Le Théorème de Pythagore dans le triangle ABC donne $BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'où

$$BC \times \frac{B'C'}{k} = AB \times \frac{A'B'}{k} + AC \times \frac{A'C'}{k}$$

c'est-à-dire $BC \times B'C' = AB \times A'B' + AC \times A'C'$.

C.II.1. On raisonne exactement comme à la question (B.II.2) : on remplace le triangle $A_1A_2A_3$ par un triangle $A_1A_2'A_3$ isocèle en A_2', de même périmètre et d'aire plus grande. On obtient un nouveau polygone P' convexe à n côté, ayant le même périmètre que P mais une aire supérieure ou égale.

C.II.2. La question précédente montre que $A_1A_2 = A_2A_3$. En recommençant avec tous les autres sommets de P, on constate que tous les côtés de P doivent avoir même longueur.

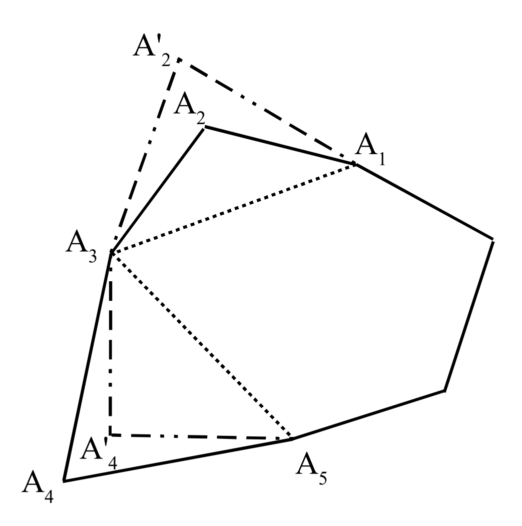


FIG. 2.8 – Question C.II.3.

C.II.3. De façon générale, notons α_i l'angle interne de P correspondant au sommet A_i. Pour fixer les idées, supposons que $\alpha_2 \neq \alpha_4$ comme sur la FIG. 2.8 (le raisonnement sera le même si l'on remplace α_2 et α_4 par des angles internes non consécutifs de P).
Le résultat de Zénodore montre qu'il est possible de construire deux triangles isocèles et semblables $A_1A_2'A_3$ et $A_3A_4'A_5$ tels que ([2])

$$\begin{cases} \mathcal{P}\left(A_1A_2A_3\right) + \mathcal{P}\left(A_3A_4A_5\right) = \mathcal{P}\left(A_1A_2'A_3\right) + \mathcal{P}\left(A_3A_4'A_5\right) \\ \mathcal{A}\left(A_1A_2A_3\right) + \mathcal{A}\left(A_3A_4A_5\right) < \mathcal{A}\left(A_1A_2'A_3\right) + \mathcal{A}\left(A_3A_4'A_5\right). \end{cases}$$

Le polygone convexe $P' = A_1A_2'A_3A_4'A_5...A_n$ aura même périmètre que P mais une aire strictement supérieure. C'est absurde compte tenu de la définition de P. On peut donc affirmer que deux angles non consécutifs de P sont toujours égaux.

C.II.4. Le polygone P est à n sommets, avec $n \geq 5$. Comme deux angles non consécutifs de P sont égaux, on aura :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = ... = \alpha_{[(n-1)/2]} \\ \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = ... = \alpha_{[n/2]} \\ \alpha_1 = \alpha_4 \end{cases}$$

[2] Ces triangles $A_1A_2'A_3$ et $A_3A_4'A_5$ ont des angles au sommets A_2' et A_4' égaux, et il y a une inégalité stricte dans la seconde inégalité écrite concernant les aires parce que $\alpha_2 \neq \alpha_4$. Si $\alpha_2 = \alpha_4$, l'inégalité stricte devient une égalité.

d'où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n$. Tous les angles internes de P sont égaux. Comme tous les côtés de P sont aussi égaux entre eux, et comme P est un polygone convexe, on peut affirmer que P est un polygone régulier convexe.

C.II.5. D'après ce qui précède, tout polygone convexe à n sommets, de périmètre p, possède une aire S inférieure à l'aire $S_{\max}$ du polygone régulier convexe à n sommets, que nous appellerons $P_{\max}$ (ce polygone est unique). Notons $P_{\max} = A_1A_2...A_n$, et H le projeté orthogonal du centre de gravité O de $P_{\max}$ sur la droite (A_1A_2). Comme OHA_1 est rectangle en H, et comme

$$\widehat{HOA_1} = \frac{\pi}{n}$$

(angle géométrique), on a $A_1A_2 = \dfrac{p}{n}$ et $OH = HA_1 \operatorname{cotan} \dfrac{\pi}{n} = \dfrac{p}{2n} \operatorname{cotan} \dfrac{\pi}{n}$ donc

$$\mathcal{A}\,(P_{\max}) = n\mathcal{A}\,(OA_1A_2) = n\frac{1}{2}A_1A_2 \times OH = \frac{p^2}{4n\tan(\pi/n)}.$$

On obtient bien :

$$S \leq \frac{p^2}{4n\tan(\pi/n)}.$$

C.III.1. $HR + RQ = HQ = 4\,AE = (AE + EB) + (GC + CD) > AB + GD$ en appliquant les inégalités triangulaires dans les triangles AEB et GCD. Ces inégalités sont strictes car ces triangles ne sont pas aplatis.

C.III.2. En multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par GD, on trouve :

$$GD\ (HR + RQ) > GD\ (AB + GD)$$
$$GD\,HR + GD\,RQ > GD\ (AB + GD)$$
$$RQ\,AB + GD\,RQ > GD\ (AB + GD)$$
$$RQ\,(AB + GD) > GD\ (AB + GD)$$
$$RQ > GD$$

donc $RQ/GD > 1$. Par suite :

$$HR = RQ \times \frac{AB}{GD} = AB \times \frac{RQ}{GD} > AB.$$

Remarque : On a montré que $HR = 2\,HL > AB$ et $RQ = 2\,RP > GD$, ce qui permet d'affirmer que les triangles isocèles $AE'B$ et $GC'D$ tels que $AE' = E'B = HL$ et $GC' = C'D = RP$, sont constructibles et ne sont pas aplatis.

C.III.3. On a : $AE' + E'B = HL + LR = HR$ (1). Mais

$$\begin{aligned} \frac{HR}{RQ} = \frac{AB}{GD} > 1 \quad &\Rightarrow \quad HR > RQ \\ &\Rightarrow \quad 2HR > HR + RQ = HQ \\ &\Rightarrow \quad HR > \frac{HQ}{2}. \quad (2) \end{aligned}$$

(1) et (2) donnent

$$AE' + E'B > \frac{HQ}{2}.$$

De même $GC' + C'D = RP + PQ = RQ$ (3) et

$$RQ < HR \ \Rightarrow \ 2RQ < HR + RQ = HQ \ \Rightarrow \ RQ < \frac{HQ}{2}. \quad (4)$$

(3) et (4) donnent

$$GC' + C'D < \frac{HQ}{2}.$$

C.III.4. Ici

$$\frac{AB}{GD} = \frac{HR}{RQ} = \frac{HL}{RP} = \frac{AE'}{GC'} = \frac{E'B}{C'D}$$

donc

$$\frac{AB}{GD} = \frac{AE'}{GC'} = \frac{E'B}{C'D}.$$

Les triangles $AE'B$ et $GC'D$ sont donc super-semblables d'après le premier cas de similitudes des triangles.

C.III.5. Par hypothèse $HQ = AE + EB + GC + CD = 4\,AE$ donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(AEB) + \mathcal{P}(GCD) &= (AB + AE + EB) + (GD + GC + CD) \\ &= AB + GD + HQ. \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(AE'B) + \mathcal{P}(GC'D) &= \big(AB + AE' + E'B\big) + \big(GD + GC' + C'D\big) \\ &= AB + GD + \big(AE' + E'B + GC' + C'D\big) \\ &= AB + GD + (HL + LR + RP + PQ) \\ &= AB + GD + HQ, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(AEB) + \mathcal{P}(GCD) = \mathcal{P}(AE'B) + \mathcal{P}(GC'D)$.

C.III.6.1. D'après (C.III.3) :

$$HR = HL + LR = AE' + E'B > \frac{HQ}{2}.$$

C.III.6.2. Comme $HQ = 4\,AE$ et $HL = AE'$,

$$HR > \frac{HQ}{2} \;\Leftrightarrow\; 2\,HL > 2\,AE \Leftrightarrow\; AE' > AE.$$

C.III.7.1. Les points E et E' sont à égale distance des extrémités du segment $[AG]$ ([3]), donc (EE') est la médiatrice de $[AG]$. Comme K est le milieu de $[AG]$, c'est aussi un point de cette médiatrice, et les points E, E' et K sont alignés sur la médiatrice de $[AG]$. On sait donc, et on pourra utiliser, que la droite (KEE') est perpendiculaire à $[AG]$ et passe par son milieu.
De la même façon, on démontrerait que T, C, C' sont alignés sur la médiatrice de $[GD]$.

C.III.7.2. On a $AE' > AE$ d'après (C.III.6.2), et le Théorème de Pythagore donne $E'K^2 = AE'^2 - AK^2 > AE^2 - AK^2 = EK^2$, d'où $E'K > EK$.
La question (C.III.6.2) montre aussi que $GC' < GC$, et l'on peut encore écrire $C'T^2 = GC'^2 - GT^2 < GC^2 - GT^2 = CT^2$ pour conclure à $C'T < CT$.

C.III.7.3. En utilisant des relations trigonométriques dans les triangles rectangles de la figure, on obtient :

$$\begin{cases} \cos\widehat{CGD} = \dfrac{GT}{GC} = \dfrac{GD}{2\,GC} \\ \cos\widehat{EGA} = \dfrac{KG}{EG} = \dfrac{AG}{2\,EG} = \dfrac{AB}{2\,GC}. \end{cases}$$

Comme $AB > GD$, on tire :

$$\cos\widehat{EGA} > \cos\widehat{CGD}.$$

Les mesures d'angles géométriques étant comprises entre 0 et π, et la fonction cosinus étant décroissante sur $[0,\pi]$, on en déduit :

$$\widehat{EGA} < \widehat{CGD}.$$

Une réflexion conserve les angles géométriques, donc $\widehat{CGD} = \widehat{NGT}$ et l'on aura aussi bien $\widehat{EGA} < \widehat{NGT}$.

[3] N'oublions pas que dans la figure, après avoir "déplacé" les triangles, on a $B = G$.

C.III.7.4. • A partir d'ici je noterai simplement $UVW \sim U'V'W'$ pour dire que deux triangles UVW et $U'V'W'$ sont super-semblables. La question (C.III.4) donne $AE'B \sim GC'D$, soit $AE'G \sim GC'D$ puisqu'ici $B = G$. Alors :

$$\frac{E'G}{C'D} = \frac{AG}{GD} = \frac{2\,KG}{2\,GT} = \frac{KG}{GT}$$

soit

$$\frac{E'G}{C'G} = \frac{KG}{TG},$$

donc

$$\cos\widehat{KGE'} = \frac{KG}{E'G} = \frac{TG}{C'G} = \cos\widehat{TGC'},$$

et finalement $\widehat{KGE'} = \widehat{TGC'}$. Comme par ailleurs $\widehat{GKE'} = \widehat{GTC'} = \pi/2$, on en déduit que $E'GK \sim C'GT$ par application du troisième cas de similitude des triangles.

Remarque : Comme les triangles $E'GK$ et $C'GT$ sont rectangles, nous avons facilement pu évaluer des cosinus pour obtenir l'égalité angulaire qui nous manquait. En fait, comme les angles droits des triangles $E'GK$ et $C'GT$ font face aux côtés les plus longs de ces triangles (les hypoténuses), on aurait pu appliquer le "quatrième cas de similitude des triangles" ([2], Th. 209) en utilisant seulement les égalités $\frac{E'G}{KG} = \frac{C'G}{TG}$ et $\widehat{GKE'} = \widehat{GTC'} = \pi/2$.

• Comme les triangles rectangles $E'GK$ et $C'GT$ sont super-semblables, on peut appliquer (C.I) pour obtenir :

$$E'G \times GC' = E'K \times C'T + KG \times TG.$$

C.III.7.5. Les égalités de sommes de périmètres de (C.III.5) donnent :

$$AE + EG + GC + CD = AE' + E'G + GC' + C'D.$$

Comme $AE = EG$, $GC = CD$, $AE' = E'G$ et $GC' = C'D$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\,(EG + GC) &= 2\left(E'G + GC'\right) \\ EG + GC &= E'G + GC' \end{aligned}$$

et l'on peut écrire : $EN < EG + GN = EG + GC = E'G + GC'$.

C.III.7.6.1. On utilise deux fois le Théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} (E'G + GC')^2 &= E'G^2 + GC'^2 + 2\,E'G.GC' \\ &= E'K^2 + KG^2 + GT^2 + C'T^2 + 2\,E'G.GC'. \end{aligned}$$

C.III.7.6.2. Les questions (C.III.7.4) et (C.III.7.6.1) donnent :

$$(E'G + GC')^2 = E'K^2 + C'T^2 + \xi$$

où

$$\begin{aligned}
\xi &= KG^2 + GT^2 + 2\,E'G.GC' \\
&= KG^2 + GT^2 + 2\left(E'K.C'T + KG.TG\right) \\
&= 2\,E'K.C'T + \left(KG^2 + GT^2 + 2\,KG.TG\right) \\
&= 2\,E'K.C'T + (KG + GT)^2 \\
&= 2\,E'K.C'T + TK^2.
\end{aligned}$$

En remplaçant :

$$\begin{aligned}
(E'G + GC')^2 &= E'K^2 + C'T^2 + 2\,E'K.C'T + TK^2 \\
&= \left(C'T + E'K\right)^2 + TK^2.
\end{aligned}$$

C.III.7.7.1. Soustrayons membre à membre les deux formules de (C.III.7.6.2) :

$$(E'G + GC')^2 - EN^2 = \left(C'T + E'K\right)^2 - (EK + TN)^2 .$$

Comme $E'G + GC' > EN$ d'après (C.III.7.5), on en déduit :

$$\left(C'T + E'K\right)^2 - (EK + TN)^2 > 0$$

c'est-à-dire $C'T + E'K > EK + TN$.

C.III.7.7.2. C'est une conséquence de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\text{(C.III.7.7.1)} &\Rightarrow C'T + E'K > EK + TN \\
&\Rightarrow E'K - EK > TN - C'T \\
&\Rightarrow EE' > CT - C'T \\
&\Rightarrow EE' > C'C.
\end{aligned}$$

C.III.7.8. Soit (P) la propriété que l'on doit démontrer. On a :

$$\begin{aligned}
(P) &\Leftrightarrow \mathcal{A}\left(AE'GE\right) > \mathcal{A}\left(DCGC'\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(AG.E'K - AG.EK\right) > \frac{1}{2}\left(GD.TC - GD.C'T\right) \\
&\Leftrightarrow KG\left(E'K - EK\right) > GT\left(TC - C'T\right) \\
&\Leftrightarrow KG.EE' > GT.C'C. \quad (*)
\end{aligned}$$

On sait que $KG = AB/2 > GD/2 = GT$, et la question (C.III.7.7.1) montre que $EE' > C'C$. En multipliant membre à membre ces deux inégalités strictes, on obtient $KG.EE' > GT.C'C$, ce qui prouve l'inégalité $(*)$, et du même coup la propriété (P).

C.III.7.9. Les aires des "fers de lance" $AE'GE$ et $DCGC'$ s'écrivent comme des différences d'aires de triangles isocèles, ce qui permet de conclure :

$$\begin{aligned}(P) &\Rightarrow \mathcal{A}\left(AE'GE\right) > \mathcal{A}\left(DCGC'\right) \\ &\Rightarrow \mathcal{A}\left(AE'G\right) - \mathcal{A}\left(AEG\right) > \mathcal{A}\left(GCD\right) - \mathcal{A}\left(GC'D\right) \\ &\Rightarrow \mathcal{A}\left(AEG\right) + \mathcal{A}\left(GCD\right) < \mathcal{A}\left(AE'G\right) + \mathcal{A}\left(GC'D\right).\end{aligned}$$

Chapitre 3

CAPES interne 2011

3.1 Énoncé

Séquences de séries consécutives de PILE ou de FACE avec une pièce de monnaie

On lance plusieurs fois, de manière indépendante, une pièce de monnaie et on s'intéresse à la série de PILE et de FACE obtenue. Plus particulièrement, on s'intéresse aux séries consécutives de PILE ou de FACE obtenues.

N.B. :

• Les parties I et II sont indépendantes.

• Il n'est pas nécessaire que le candidat explicite un espace probabilisé correspondant à l'expérience aléatoire étudiée.

• Pour tout événement E, la probabilité de E sera notée $\mathrm{p}(E)$.

• On admet l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : si X est une variable aléatoire réelle d'espérance mathématique m et de variance σ^2, alors pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{p}(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Remarque — Dans tout le problème, lorsqu'il est demandé d'**expliquer**, l'argumentation peut s'appuyer sur un schéma ou un arbre.

[0] ag83e

Préliminaires - SUITES DE FIBONACCI

Dans le problème, on rencontrera à plusieurs reprises, des suites dites de Fibonacci : ce sont des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels, définies par leurs deux premiers termes $u_1 = a$ et $u_2 = b$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On admettra qu'une suite de Fibonacci est entièrement déterminée par la donnée de a et b.

1. Démontrer que la suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $r \in \mathbb{R}^*$ est une suite de Fibonacci si, et seulement si, r est solution de l'équation $r^2 - r - 1 = 0$. Déterminer les deux solutions de cette équation qui seront notées ϕ et ψ (où ϕ désigne la solution positive).

2. Soit a et b deux nombres réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de Fibonacci telle que $u_1 = a$ et $u_2 = b$.

2.1. On considère le système d'inconnues (x, y) :

$$\begin{cases} \phi\, x + \psi\, y &= a \\ \phi^2\, x + \psi^2\, y &= b \end{cases}$$

Vérifier que ce système admet une solution unique. On notera (λ, μ) cette solution.

Note — On ne demande pas de calculer λ et μ.

2.2. Vérifier par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = \lambda\phi^n + \mu\psi^n.$$

3. **Dans cette section 3., on s'intéresse au cas particulier défini par** $a = 0$ **et** $b = 1$.

3.1. Calculer λ et μ (définis à la question 2.1) dans ce cas particulier.

3.2. En déduire l'expression suivante de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right].$$

Partie I - SEQUENCES DE 3 COTES CONSECUTIFS EGAUX

On cherche à estimer dans lequel des intervalles $[0; 0,2[$, $[0,2; 0,4[$, $[0,4; 0,6[$, $[0,6; 0,8[$, $[0,8; 1]$ se situe la probabilité qu'en dix lancers d'une pièce de monnaie bien équilibrée apparaissent au moins trois côtés consécutifs égaux, c'est-à-dire au moins trois PILE ou au moins trois FACE.

On dispose d'une pièce de monnaie bien équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle la probabilité d'apparition du côté PILE et la probabilité d'apparition du côté FACE sont égales à 1/2.

Pour tout entier naturel n non nul, on modélise n lancers successifs de la pièce de monnaie équilibrée par la n-liste $(x_1, x_2, ..., x_n)$, où, pour tout entier k compris au sens large entre 1 et n, x_k vaut 1 si PILE apparaît au k-ième lancer, 0 sinon.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement « apparition d'au moins trois côtés consécutifs égaux (c'est-à-dire au moins trois PILE ou au moins trois FACE) en n lancers » et p_n sa probabilité.

1. **Simulation sur tableur (cas $n = 10$)**

1.1. Dans la simulation de dix lancers sur un tableur dont une copie d'écran est proposée ci-dessous :

• chacune des cellules de la ligne L1 de la plage C1C10 contient de façon équiprobable l'un des deux nombres 0 ou 1 - ici obtenu en utilisant la formule ENT(2*ALEA()).

• chacune des cellules L2C3, L2C4, ..., L2C10 contient respectivement la somme du contenu des cellules L1C1, L1C2, L1C3, la somme du contenu des cellules L1C2, L1C3, L1C4, ..., la somme du contenu des cellules L1C8, L1C9, L1C10.

<>	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
2			2	1	1	0	0	1	2	3
3										1

On veut que la cellule L3C10 contienne 1 si E_{10} est réalisé, 0 sinon. Comment procéder pour obtenir ce résultat à partir du contenu des cellules de la ligne L2 de la plage C3:C10 ?

1.2. On répète N fois l'expérience aléatoire qui consiste à lancer dix fois la pièce de monnaie ($N \in \mathbb{N}^*$) et, pour tout entier k compris au sens large entre 1 et N, on désigne par X_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si, à la k-ième expérience, E_{10} est réalisé, 0 sinon.
Alors X_1, X_2, ..., X_N sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi de probabilité ; on note m leur espérance commune et on pose :

$$F_N = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_N}{N}.$$

1.2.1. Décrire la loi suivie par chacune des variables aléatoires X_1, ..., X_N.

1.2.2. Préciser l'espérance de F_N en fonction de m et N.

1.2.3. Calculer la variance de F_N en fonction de m et N.

1.2.4. On désire déterminer $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $p\left(|F_N - m| < 0,1\right) \geq 0,9$.

1.2.4.1. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :

$$p\left(|F_N - m| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{m\,(1-m)}{N\varepsilon^2}.$$

1.2.4.2. Justifier l'inégalité $m\,(1-m) \leq \dfrac{1}{4}$ valable pour tout $m \in [0,1]$.

1.2.4.3. Montrer que $N \geq 250$ répond au problème posé en 1.2.4.

1.3. Dans la simulation de 250 répétitions de dix lancers de la pièce de monnaie sur un tableur dont une copie d'écran partielle est proposée ci-dessous :

• les cases L3, L5, ..., L499 et L501 de la colonne C12 contiennent 1 si respectivement à l'expérience numéro 1, 2, ..., 249, 250, l'événement E_{10} est réalisé et 0 sinon ;

• la cellule L502C12 contient la moyenne du contenu des cellules L3, L5, ..., L499 et L501 de la colonne C12.

◇	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	expérience n°1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	
3				1	2	3	3	2	2	2	2	1
4	expérience n°2	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	
5				3	3	3	3	2	1	1	1	1
6	expérience n°3	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	
7				3	2	1	1	1	2	2	2	1
8												
408												
498	expérience n°249	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	
499				1	1	2	2	2	1	2	2	0
500	expérience n°250	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	
501				1	2	1	2	2	2	1	0	1
502												0,844

À chaque appui sur une certaine touche, une nouvelle simulation de 250 répétitions de dix lancers est exécutée. En appuyant trois fois sur cette touche, on a obtenu dans la cellule L502 de la colonne C12 les valeurs $0,844$ $0,765$ et $0,81$. Que représentent ces valeurs en liaison avec la section 1.2 ?

2. **Détermination de $p_n = \mathrm{p}(E_n)$**

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on s'intéresse à l'événement $\overline{E}_n$ (l'événement contraire de E_n) et on note u_n le nombre de n-listes d'éléments de l'ensemble $\{F, P\}$ **ne comportant pas** trois éléments consécutifs égaux.

2.1. Justifier les égalités $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 6$. Calculer u_4.

2.2. On se propose de démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Fibonacci.

2.2.1. Justifier que pour $n \geq 1$, le nombre de $(n+2)$-listes de $\overline{E}_{n+2}$ commençant par PF ou par FP est égal à u_{n+1}.

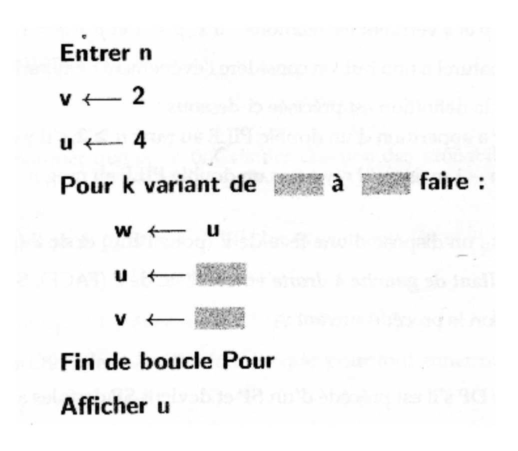
2.2.2. Justifier que pour $n \geq 1$, le nombre de $(n+2)$-listes de $\overline{E}_{n+2}$ commençant par PP ou par FF est égal à u_n.

2.2.3. Conclure.

2.3. Démontrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = \mathrm{p}(E_n) = 1 - \frac{u_n}{2^n}.$$

2.4. Reproduire l'algorithme ci-dessous et en compléter les zones grisées de façon à ce qu'à la fin de cet algorithme, l'affichage de la variable u donne la valeur de u_n $(n \geq 2)$. Aucune justification n'est attendue.



Entrer n

v ⟵ 2

u ⟵ 4

Pour k variant de ▒▒ à ▒▒ faire :

    w ⟵ u

    u ⟵ ▒▒

    v ⟵ ▒▒

Fin de boucle Pour

Afficher u

2.5. Déterminer u_{10} à l'aide de la calculatrice. En déduire la valeur exacte et une valeur décimale approchée à $0,01$ près de p_{10}.

2.6. **Expression explicite de p_n**

2.6.1. Démontrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

2.6.2. Quelle est la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

2.7. Le but de cette question est de déterminer le plus petit entier naturel non nul n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, la probabilité d'apparition d'au moins trois côtés consécutifs égaux en n lancers soit supérieure ou égale à $0,95$.

2.7.1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et prouver que l'on a, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} \leq 2u_n$.

2.7.2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} - p_n \geq 0$.

2.7.3. En explicitant la méthode choisie, utiliser la calculatrice pour donner la valeur de l'entier n_0.

Partie II - SEQUENCES DE 2 COTES PILE CONSECUTIFS

Dans cette deuxième partie, on effectue des lancers successifs (et indépendants) d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'apparition de PILE (P) est p et celle de FACE (F) est q, où les réels p et q vérifient les relations $0 < p < 1$ et $p + q = 1$. Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement : « apparition d'un double PILE au rang n », dont la définition est précisée ci-dessous :

> On dit qu'il y a apparition d'un double PILE au rang $n \geq 2$, s'il y a un PILE au rang n et au rang $n-1$ mais qu'il n'y a pas un double PILE au rang $n-1$.

Plus précisément, on dispose d'une liste de P (pour PILE) et de F (pour FACE). On va la transformer **en allant de gauche à droite** en une liste de F (FACE), SP (simple PILE) et DP (double PILE) selon le procédé suivant :

- un F reste F,
- un P devient DP s'il est précédé d'un SP et devient SP dans les autres cas.

L'exemple suivant donne les résultats de seize premiers lancers :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F	P	P	F	P	P	P	F	P	F	P	P	P	P	P	F
F	SP	DP	F	SP	DP	SP	F	SP	F	SP	DP	SP	DP	SP	F

Il y a un double PILE aux rangs 3, 6, 12 et 14. Les rangs 7, 13 et 15, en revanche restent des simple PILE car le rang précédent est déjà double PILE. Un PILE ne peut donc pas participer à la réalisation de plus d'un double PILE, dans le sens où, pour tout entier naturel n non nul, si l'événement « apparition d'un double PILE au rang n » est réalisé, l'événement « apparition d'un double PILE au rang $n+1$ » ne l'est pas.

On notera, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'événement : « apparition d'un double PILE au rang n » et a_n sa probabilité ;
- P_n l'événement : « apparition de PILE au rang n » et F_n l'événement : « apparition de FACE au rang n ».

1. **Étude d'un exemple**

On considère les 16 lancers suivants :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P	F	P	P	P	P	P	P	F	F	F	P	P	P	F	F

Recopier le tableau en complétant la dernière ligne par les indications F, SP ou DP.

2. **Étude des événements A_n**

2.1. **Calcul de a_n**

2.1.1. On peut remarquer que $a_1 = 0$. Calculer chacune des probabilités a_2, a_3, a_4 en fonction de p et q.

2.1.2. Expliquer pourquoi, pour $n, k \in \mathbb{N}^*$, les événements A_n et P_{n+k} sont indépendants.

2.1.3. Expliquer pourquoi les événements $F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}$ et $A_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}$ constituent une partition de A_{n+2}. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité $a_{n+2} = p^2 a_n + qp^2$.

2.1.4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = a_n - c$, où c est le réel tel que $c = p^2 c + qp^2$.

2.1.4.1. Justifier l'existence du réel c.

2.1.4.2. Démontrer qu'il existe un réel β, qu'on déterminera, tel que, pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+2} = \beta v_n$.

2.1.4.3. En distinguant les cas n pair et n impair, donner l'expression de v_n en fonction de n et de p.

2.1.5. Établir alors l'expression :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{p}{1+p}\left(p + (-p)^n\right).$$

2.2. Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'événement A_n est réalisé et 0 sinon.

2.2.1. Préciser la loi de probabilité de Y_n et son espérance.

2.2.2. Interpréter, pour n entier naturel non nul, la variable aléatoire : $Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

On désigne par m_n le nombre moyen de réalisations d'un double PILE sur les n premiers lancers de la pièce de monnaie. Déterminer, lorsque n tend vers $+\infty$, la limite de m_n/n.

3. **Étude de l'apparition du premier double PILE**

Pour tout entier naturel n non nul, on note B_n l'événement : « la première apparition d'un double pile se situe au rang n » et b_n sa probabilité.

3.1. **Relation de récurrence**

3.1.1. On a bien sûr $b_1 = 0$. Calculer chacune des probabilités b_2, b_3, b_4.

3.1.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les probabilités conditionnelles $\mathrm{p}_{F_1}(B_{n+2})$ et $\mathrm{p}_{P_1}(B_{n+2})$ en fonction de $\mathrm{p}(B_{n+1})$ et $\mathrm{p}(B_n)$.

3.1.3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+2} = qb_{n+1} + pqb_n$.

3.2. **Étude du cas particulier où la pièce est bien équilibrée**

On suppose donc dans toute la section 3.2 que la pièce est bien équilibrée.

3.2.1. Donner les valeurs des probabilités b_1, b_2, b_3 et b_4, ainsi que l'expression, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de b_{n+2} en fonction de b_{n+1} et de b_n.

3.2.2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 2^n b_n$. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Fibonacci (voir la partie préliminaire).

3.2.3. Donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de b_n en fonction de n.

3.3. **Étude d'un deuxième cas particulier**

On suppose dans cette section 3.3 que $p = 2/3$.

3.3.1. Donner les valeurs des probabilités b_1, b_2, b_3 et b_4.

3.3.2. C**alcul de** b_n — Pour tout entier naturel n non nul, on note U_n la matrice colonne définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix}.$$

3.3.2.1. Déterminer une matrice A telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} = AU_n.$$

3.3.2.2. Exprimer, pour tout entier naturel non nul, la matrice colonne U_n en fonction de n, A et U_1.

3.3.2.3. On pose $P = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice Q qui vérifie $PQ = QP = I$ où I est la matrice unité définie $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.3.2.4. On pose $D = QAP$. Calculer D, puis expliciter la matrice D^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3.3.2.5. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $A^n = PD^nQ$.

3.3.2.6. En déduire que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

3.3.3. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle C_n l'événement : « aucune apparition d'un double PILE au cours des n premiers lancers » et c_n sa probabilité.

3.3.3.1. Exprimer $\overline{C_n}$ à l'aide des événements B_1, ..., B_n puis déterminer c_n.

3.3.3.2. Quelle est la limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Interpréter ce résultat.

3.4. **Temps d'attente du premier double PILE**

On revient au cas général et on s'intéresse dans cette question à la variable aléatoire T qui donne le rang de la première apparition d'un double pile.

3.4.1. Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire T et, pour chacune d'elles, la probabilité que T prenne cette valeur.

3.4.2. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction polynomiale f_n définie
sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = 1 + x + ... + x^n$.

3.4.2.1. En considérant la dérivée de f_n, démontrer que l'on a, pour tout réel $x \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1 + (x-1)\,nx^n - x^n}{(1-x)^2}.$$

3.4.2.2. Pour tout réel x strictement compris entre -1 et 1, calculer la limite de la suite $(nx^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3.4.2.3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel x strictement compris entre -1 et 1, $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ tend vers $\frac{1}{(1-x)^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

3.4.3. On admet que la variable aléatoire T admet une espérance et que cette espérance $E(T)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} k \, \mathrm{p}(T=k)$.

3.4.3.1. Dans le cas $p = 2/3$, calculer l'espérance $E(T)$ de T. Quel est le rang moyen d'apparition du premier double PILE ?

3.4.3.2. Reprendre la question précédente dans le cas où la pièce est bien équilibrée.

3.4.4. Commenter en les comparant les résultats des deux questions précédentes.

3.2 Corrigé

Préliminaires - SUITES DE FIBONACCI

P.1. $(r^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Fibonacci si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad r^{n+2} = r^{n+1} + r^n.$$

Comme $r \neq 0$, cela équivaut à $r^2 - r - 1 = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 5$, donc les racines de cette équation sont :

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

P.2.1. Le système proposé admet une solution unique car il est de Cramer. En effet :

$$\begin{vmatrix} \phi & \psi \\ \phi^2 & \psi^2 \end{vmatrix} = \phi\psi^2 - \phi^2\psi = \phi(\psi+1) - (\phi+1)\psi = \phi - \psi = \sqrt{5} \neq 0.$$

P.2.2. La relation est évidente si $n = 1$ ou 2 car :

$$\begin{cases} u_1 = a = \lambda\phi + \mu\psi \\ u_2 = b = \lambda\phi^2 + \mu\psi^2. \end{cases}$$

[0]ag83

Si l'on a $u_n = \lambda\phi^n + \mu\psi^n$ jusqu'au rang $n \geq 3$, alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + u_{n-1} \\ &= (\lambda\phi^n + \mu\psi^n) + \left(\lambda\phi^{n-1} + \mu\psi^{n-1}\right) \\ &= \lambda\phi^{n-1}(\phi+1) + \mu\psi^{n-1}(\psi+1) \\ &= \lambda\phi^{n-1} \times \phi^2 + \mu\psi^{n-1} \times \psi^2 \\ &= \lambda\phi^{n+1} + \mu\psi^{n+1}, \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.

P.3.1. Si $(a,b) = (0,1)$, λ et μ sont solutions de :

$$\begin{cases} \phi\lambda + \psi\mu = 0 \\ \phi^2\lambda + \psi^2\mu = 1 \end{cases}$$

de déterminant $\sqrt{5}$, donc :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} 0 & \psi \\ 1 & \psi^2 \end{vmatrix} = \frac{-\psi}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \phi & 0 \\ \phi^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\phi}{\sqrt{5}},$$

autrement dit :

$$\lambda = \frac{-1}{\sqrt{5}} \times \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}.$$

P.3.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on obtient donc :

$$u_n = \lambda\phi^n + \mu\psi^n = \frac{-\psi}{\sqrt{5}}\phi^n + \frac{\phi}{\sqrt{5}}\psi^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^{n-1} - \psi^{n-1}\right]$$

puisque $\phi\psi = -1$, c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right].$$

Partie I - SEQUENCES DE 3 COTES CONSECUTIFS EGAUX

I.1.1. On peut écrire la commande suivante dans la cellule L3C10 :

=SI(OU(MAX(C2 :J2)=3 ;MIN(C2 :J2)=0) ;1 ;0)

Remarque — On n'en dira pas plus si on travaille en temps limité. Entre nous, la commande SI("Test" ;1 ;0) permet d'effectuer un test conditionnel "Test" et de renvoyer la valeur 1 si la condition spécifiée est vraie, et 0 sinon. La commande OU(MAX(C2 :J2)=3 ;MIN(C2 :J2)=0) renvoie la valeur VRAI si l'un des arguments MAX(C2 :J2)=3 ou MIN(C2 :J2)=0 est vrai, et renvoie la valeur FAUX dans le cas contraire.
La valeur 1 s'affichera dans la cellule L3C10 si et seulement si l'un des chiffres 0 ou 3 se trouve dans l'une des cellules de la plage L2C3 :L2C10, et cela indiquera que trois piles ou trois faces ont été tirés consécutivement au moins une fois dans cette série de 10 lancers.
Rappelons que pour effectuer une nouvelle simulation en recalculant les fonctions ALEA, il suffit d'appuyer sur la touche F9.

I.1.2.1. Les variables aléatoires X_i sont indépendantes entre elles, et suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètre m. L'espérance et la variance de X_i seront donc $E(X_i) = m$ et $V(X_i) = m(1-m)$.

I.1.2.2. On a :

$$E(F_n) = E\left(\frac{X_1 + ... + X_N}{N}\right) = \frac{1}{N}(E(X_1) + ... + E(X_N)) = \frac{Nm}{N} = m.$$

I.1.2.3. Comme les variables aléatoires X_i sont indépendantes :

$$\begin{aligned} V(F_n) = V\left(\frac{X_1 + ... + X_N}{N}\right) &= \frac{1}{N^2}V(X_1 + ... + X_N) \\ &= \frac{1}{N^2}(V(X_1) + ... + V(X_N)) \\ &= \frac{m(1-m)}{N}. \end{aligned}$$

I.1.2.4.1. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$p(|F_N - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(F_n)}{\varepsilon^2} = \frac{m(1-m)}{N\varepsilon^2}.$$

I.1.2.4.2. La fonction $m \mapsto f(m) = m(1-m)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(m) = -2m+1$ qui s'annule en $m = 1/2$. Cette dérivée est positive si $m \leq 1/2$, négative sinon. La fonction f admet donc un maximum

global en $m = 1/2$, et ce maximum vaut $f(1/2) = 1/4$. On aura donc bien, a fortiori :

$$\forall m \in [0,1] \quad m(1-m) \leq \frac{1}{4}.$$

I.1.2.4.3. On en déduit :

$$p(|F_N - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{m(1-m)}{N\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}$$

de sorte que :

$$p(|F_N - m| < \varepsilon) = 1 - p(|F_N - m| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}.$$

On aura donc $p(|F_N - m| < 0,1) \geq 0,9$ à partir du moment où l'on aura :

$$1 - \frac{1}{4N10^{-2}} \geq 0,9. \quad (*)$$

Comme :

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{4N10^{-2}} \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{10^3}{4} \leq N \Leftrightarrow 250 \leq N,$$

on peut affirmer que :

$$N \geq 250 \Rightarrow p(|F_N - m| < 0,1) \geq 0,9.$$

I.1.3. Les valeurs $0,844$; $0,765$ et $0,811$ sont les valeurs prises par F_{250} pour chacune des simulations de 205 répétitions de 10 lancers. Plus N est grand et plus F_N devrait s'approcher de l'espérance m de la variable aléatoire F_N. Ces trois valeurs obtenues avec le tableur nous donnent donc des approximations de m.
Plus précisément, on a montré plus haut que $N \geq 250$ entraînait :

$$p(|F_N - m| < 0,1) \geq 0,9.$$

Cela signifie que l'on a plus de 9 chances sur 10 pour que le nombre m appartienne à l'intervalle $[F_N - 0,1; F_N + 0,1]$ lorsque F_N est égal à $0,844$, à $0,765$ ou à $0,811$. On obtient ainsi une approximation de la probabilité p_{10} de l'événement E_{10} (puisque ici $p_{10} = m$).

I.2.1. Il y a deux listes d'un seul élément, à savoir P et F, et aucun élément de ces listes n'est bien sûr répété trois fois de suite, donc $u_1 = 2$. De même, il existe quatre 2-listes et aucune dont les éléments sont répétés trois fois de suite, donc $u_2 = 2$. Sur $2^3 = 8$ listes possibles, deux 3-listes comportent des éléments consécutifs égaux PPP et FFF, donc $u_3 = 8 - 2 = 6$.

Parmi les 4-listes il faut enlever les listes $PPPF$, $FFFP$, $PFFF$, $FPPP$, $FFFF$ et $PPPP$, de sorte que $u_4 = 2^4 - 6 = 10$.

I.2.2.1. De façon générale, si $X, Y \in \{P, F\}$, notons $\overline{E}_n^X$ (resp. $\overline{E}_n^{XY}$) la partie de $\overline{E}_n$ formée des n-listes de $\overline{E}_n$ qui commencent par X (resp. par XY). Les applications :

$$\begin{array}{ccc} \overline{E}_{n+2}^{PF} & \rightarrow & \overline{E}_{n+1}^{F} \\ PFx_3...x_{n+2} & \mapsto & Fx_3...x_{n+2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \overline{E}_{n+2}^{FP} & \rightarrow & \overline{E}_{n+1}^{P} \\ FPx_3...x_{n+2} & \mapsto & Px_3...x_{n+2} \end{array}$$

sont clairement des bijections. Comme $\overline{E}_{n+1} = \overline{E}_{n+1}^F \cup \overline{E}_{n+1}^P$ (somme disjointe), le cardinal de $\overline{E}_{n+1}$ sera égal à la somme des cardinaux de $\overline{E}_{n+1}^F$ et $\overline{E}_{n+1}^P$, ce que je noterai :

$$\left|\overline{E}_{n+1}\right| = \left|\overline{E}_{n+1}^F\right| + \left|\overline{E}_{n+1}^P\right|.$$

Comme les ensembles $\overline{E}_{n+2}^{PF}$ et $\overline{E}_{n+2}^{FP}$ sont disjoints, on aura :

$$\left|\overline{E}_{n+2}^{PF} \cup \overline{E}_{n+2}^{FP}\right| = \left|\overline{E}_{n+2}^{PF}\right| + \left|\overline{E}_{n+2}^{FP}\right| = \left|\overline{E}_{n+1}^{F}\right| + \left|\overline{E}_{n+1}^{P}\right| = \left|\overline{E}_{n+1}\right| = u_{n+1}.$$

I.2.2.2. Les applications :

$$\begin{array}{ccc} \overline{E}_{n+2}^{PP} & \rightarrow & \overline{E}_{n}^{F} \\ PPx_3...x_{n+2} & \mapsto & Fx_4...x_{n+2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \overline{E}_{n+2}^{FF} & \rightarrow & \overline{E}_{n}^{P} \\ FFx_3...x_{n+2} & \mapsto & Px_4...x_{n+2} \end{array}$$

sont aussi des bijections. Comme les ensembles $\overline{E}_{n+2}^{PP}$ et $\overline{E}_{n+2}^{FF}$ sont disjoints, et comme $\{\overline{E}_n^F, \overline{E}_n^P\}$ est une partition de $\overline{E}_n$, on obtient :

$$\left|\overline{E}_{n+2}^{PP} \cup \overline{E}_{n+2}^{FF}\right| = \left|\overline{E}_{n+2}^{PP}\right| + \left|\overline{E}_{n+2}^{FF}\right| = \left|\overline{E}_{n}^{F}\right| + \left|\overline{E}_{n}^{P}\right| = \left|\overline{E}_{n}\right| = u_{n}.$$

I.2.2.3. Comme $\left\{\overline{E}_{n+2}^{PF}, \overline{E}_{n+2}^{FP}, \overline{E}_{n+2}^{PP}, \overline{E}_{n+2}^{FF}\right\}$ est une partition de $\overline{E}_{n+2}$, on obtient :

$$u_{n+2} = \left|\overline{E}_{n+2}\right| = \left|\overline{E}_{n+2}^{PF} \cup \overline{E}_{n+2}^{FP}\right| + \left|\overline{E}_{n+2}^{PP} \cup \overline{E}_{n+2}^{FF}\right| = u_{n+1} + u_n$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien une suite de Fibonacci.

I.2.3. Le nombre total de n-listes possibles est 2^n, et $\left|\overline{E}_{n+2}\right| = u_n$, donc $\mathrm{p}(\overline{E}_n) = u_n/2^n$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = \mathrm{p}\left(E_n\right) = 1 - \mathrm{p}(\overline{E}_n) = 1 - \frac{u_n}{2^n}.$$

I.2.4. Voici un algorithme qui fonctionne :

Entrer n
$v \leftarrow 2$
$u \leftarrow 4$
Pour k variant de 1 à $n-2$ faire :
  $w \leftarrow u$
  $u \leftarrow u+v$
  $v \leftarrow w$
Fin de boucle Pour
Afficher u

I.2.5. Voici le programme sur Algobox© :

```
ag83programme1
1 VARIABLES
2 n EST_DU_TYPE NOMBRE
3 u EST_DU_TYPE NOMBRE
4 v EST_DU_TYPE NOMBRE
5 w EST_DU_TYPE NOMBRE
6 k EST_DU_TYPE NOMBRE
7 DEBUT_ALGORITHME
8 LIRE n
9 v PREND_LA_VALEUR 2
10 u PREND_LA_VALEUR 4
11 POUR k ALLANT_DE 1 A n-2
12 DEBUT_POUR
13 w PREND_LA_VALEUR u
14 u PREND_LA_VALEUR u+v
15 v PREND_LA_VALEUR w
16 FIN_POUR
17 AFFICHER u
18 FIN_ALGORITHME
```

Pour $n = 10$, ce programme donne $u_{10} = 178$. d'où :

$$p_{10} = 1 - \frac{u_{10}}{2^{10}} \simeq 0,826\,171\,875 \simeq 0,83$$

à 10^{-2} près par excès.

I.2.6.1. Notons $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de Fibonacci de premiers termes 0 et 1 étudiée en P.3.2. Ecrivons les premiers termes des suites (u_n^*) et (u_n) :

(u_n^*) :	0	1	1	2	3	5	8	13	...
(u_n) :	2	4	6	10	16	26	...		

Avec des yeux de Sioux, on peut imaginer que $u_n = 2u^*_{n+2}$ pour tout n, ce qu'on vérifie par récurrence. La formule est vraie si $n = 1$ ou 2. Si elle est vraie jusqu'au rang $n \geq 2$, alors :

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} = 2u^*_{n+2} + 2u^*_{n+1} = 2(u^*_{n+2} + u^*_{n+1}) = 2u^*_{n+3}$$

donc elle est vrai au rang $n+1$. Il suffit d'utiliser la question P.3.2 pour obtenir alors :

$$u_n = 2u^*_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Remarque — Sans yeux de Sioux, on recommence les calculs des préliminaires pour obtenir l'expression des u_n en fonction de n. C'est la méthode du 20e de cavalerie.

I.2.6.2. On a :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n+1} - \psi^{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{n+1}\left(1 - \frac{\psi^{n+1}}{\phi^{n+1}}\right)$$

donc :

$$p_n = 1 - \frac{u_n}{2^n} = 1 - A_n$$

où :

$$A_n = \frac{\phi}{\sqrt{5}}\frac{\phi^n}{2^n}\left(1 - \frac{\psi^{n+1}}{\phi^{n+1}}\right).$$

Comme $\psi/\phi \simeq -0.38$ et $\phi/2 \simeq 0,81$, $\lim(\psi/\phi)^{n+1} = 0$ et $\lim(\phi/2)^n = 0$, donc $\lim A_n = 0$ et $\lim p_n = 1$.

I.2.7.1. • La suite (u_n) est croissante puisque c'est une suite à termes positifs (comme on le vérifie facilement par récurrence) et donc pour tout entier $n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n = u_{n-1} \geq 0$, la première inégalité $u_1 \leq u_2$ étant assurée puisque $u_1 = 2$ et $u_2 = 4$.

• Pour tout $n \geq 2$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \leq 2u_n$, et si $n = 1$, on a évidemment $u_2 \leq 2u_1$ puisque $u_1 = 2$ et $u_2 = 4$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} \leq 2u_n.$$

I.2.7.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_{n+1} - p_n = \left(1 - \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}}\right) - \left(1 - \frac{u_n}{2^n}\right) = \frac{2u_n - u_{n+1}}{2^{n+1}} \geq 0.$$

I.2.7.3. On va modifie l'algorithme du I.2.5 pour calculer les u_k jusqu'à ce que :

$$p_k = 1 - \frac{u_k}{2^k} \geq 0,95$$

et rajouter un compteur k indiquant l'indice de u_k. Sur Algobox©, on obtient :

```
ag83programme2
VARIABLES
u EST_DU_TYPE NOMBRE
v EST_DU_TYPE NOMBRE
w EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
v PREND_LA_VALEUR 2
u PREND_LA_VALEUR 4
k PREND_LA_VALEUR 2
TANT_QUE (1-u/pow(2,k)<0.95) FAIRE
DEBUT_TANT_QUE
k PREND_LA_VALEUR k+1
w PREND_LA_VALEUR u
u PREND_LA_VALEUR u+v
v PREND_LA_VALEUR w
FIN_TANT_QUE
AFFICHER k
FIN_ALGORITHME
```

Le programme affiche : 16, donc $n_0 = 16$.

Vérification : En utilisant le programme du I.2.5, on obtient $u_{15} = 1974$ et $u_{16} = 3194$, d'où $p_{15} \simeq 0,939\,758\,300\,781\,25$ et $p_{16} \simeq 0,951\,263\,427\,734\,375$.

Partie II - SEQUENCES DE 2 COTES PILE CONSECUTIFS

II.1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P	F	P	P	P	P	P	P	F	F	F	P	P	P	F	F
SP	F	SP	DP	SP	DP	SP	DP	F	F	F	SP	DP	SP	F	F

II.2.1.1. On construit un arbre où l'on met en évidence les SP et les DP (FIG. 3.1) Les probabilités sont marquées sur l'arbre, et l'on obtient :

$$\begin{aligned} a_2 &= p^2 \\ a_3 &= p^2 q \\ a_4 &= p^4 + p^3 q + p^2 q^2 = p^4 + p^2 q. \end{aligned}$$

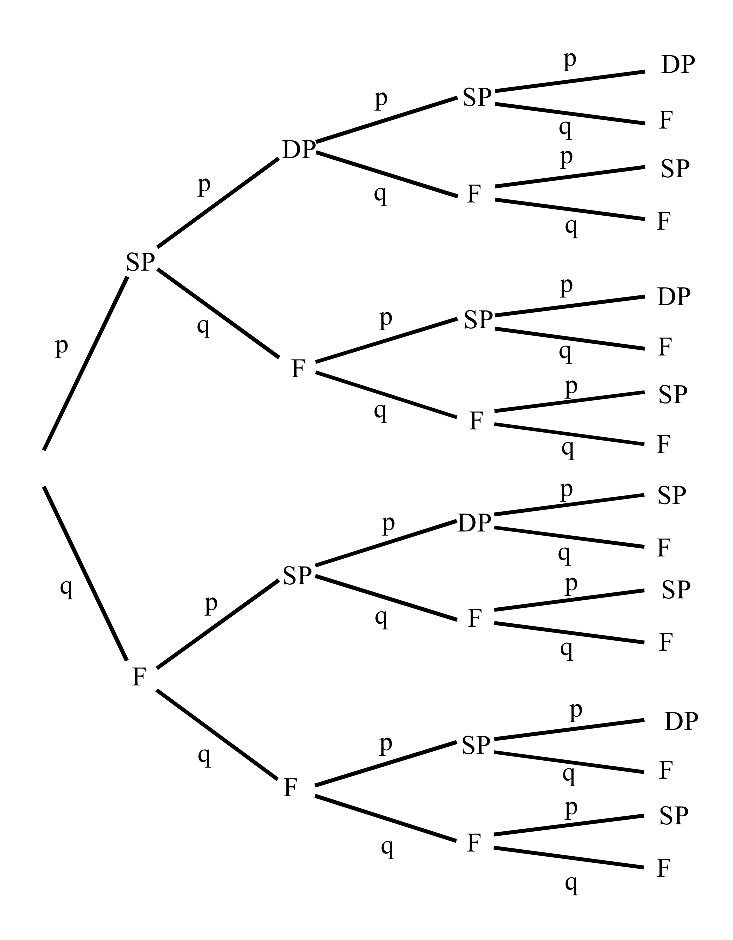


FIG. 3.1 – Série de quatre lancers

Remarque — Comment justifier complètement que la lecture de l'arbre donne $a_2 = p^2$? Il faut utiliser la formule des probabilités conditionnelles : comme A_2 est réunion disjointe de $A_2 \cap P_1$ et $A_2 \cap F_1$, on a :

$$\begin{aligned} a_2 = \mathrm{p}(A_2) &= \mathrm{p}\,(A_2 \cap P_1) + \mathrm{p}\,(A_2 \cap F_1) \\ &= \mathrm{p}_{P_1}(A_2)\,\mathrm{p}\,(P_1) + \mathrm{p}_{F_1}(A_2)\,\mathrm{p}\,(F_1) \\ &= p \times p + 0 \times q \;=\; p^2. \end{aligned}$$

II.2.1.2. Le fait de tirer PILE au rang $n+k$ (où $k > 0$) se produit avec la même probabilité quelle que soit l'issue du lancer de pièce au rang n. En particulier $\mathrm{p}_{A_n}(P_{n+k}) = \mathrm{p}(P_{n+k}) = p$, donc :

$$\frac{\mathrm{p}(A_n \cap P_{n+k})}{\mathrm{p}(A_n)} = \mathrm{p}(P_{n+k}).$$

Autrement dit $\mathrm{P}(A_n \cap P_{n+k}) = \mathrm{P}(A_n) \times \mathrm{P}(P_{n+k})$, et l'on traduit cela en disant que les événements A_n et P_{n+k} sont indépendants.

II.2.1.3. • Obtenir un DOUBLE PILE au rang $n+2$ se fait de deux façons différentes et de deux façons seulement :

- Premier cas "FPP" : on tire PILE au rang $n+2$ après avoir tiré PILE au rang $n+1$ et FACE au rang n,

- Second cas "$(DP)PP$" : on tire PILE au rang $n+2$ après avoir tiré PILE au rang $n+1$ et un DOUBLE PILE au rang n.

A_{n+2} est donc réunion disjointe de $F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}$ et $A_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}$ puisque l'on ne peut pas avoir simultanément F_n et A_n (autrement dit $F_n \cap A_n = \varnothing$, ce que l'on traduit en disant que les événements F_n et A_n sont incompatibles).

• Ainsi :

$$\begin{aligned} a_{n+2} = \mathrm{P}(A_{n+2}) &= \mathrm{P}(F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}) + \mathrm{P}(A_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}) \\ &= \mathrm{P}(F_n)\,\mathrm{P}(P_{n+1})\,\mathrm{P}(P_{n+2}) + \mathrm{P}(A_n)\,\mathrm{P}(P_{n+1})\,\mathrm{P}(P_{n+2}) \\ &= qpp + a_n pp \\ &= p^2 a_n + qp^2. \end{aligned}$$

II.2.1.4.1. Comme $0 < p < 1$, l'entier $1 - p^2$ n'est pas nul et :

$$c = p^2 c + qp^2 \;\Leftrightarrow\; c = \frac{qp^2}{1-p^2} = \frac{p^2}{1+p}.$$

II.2.1.4.2.

$$\begin{aligned} v_{n+2} = \beta v_n &\Leftrightarrow a_{n+2} - c = \beta\,(a_n - c) \\ &\Leftrightarrow p^2 a_n + qp^2 - \left(p^2 c + qp^2\right) = \beta\,(a_n - c) \\ &\Leftrightarrow p^2\,(a_n - c) = \beta\,(a_n - c) \\ &\Leftrightarrow \beta = p^2. \end{aligned}$$

On aura donc $v_{n+2} = \beta v_n$ pour tout n, dès que $\beta = p^2$.

II.2.1.4.3. Si n est impair, $n = 2m+1$ et $v_n = \beta^m v_1$ où :

$$v_1 = a_1 - c = -c = \frac{-p^2}{1+p}$$

donc :

$$v_n = p^{n-1}\frac{-p^2}{1+p} = -\frac{p^{n+1}}{1+p}.$$

Si n est pair, $n = 2m$ et $v_n = \beta^{m-1} v_2$ où :

$$v_2 = a_2 - c = p^2 - c = p^2 - \frac{p^2}{1+p} = \frac{p^3}{1+p}.$$

Ainsi :

$$v_n = p^{n-2}\frac{p^3}{1+p} = \frac{p^{n+1}}{1+p}.$$

II.2.1.5. Si n est impair,

$$a_n = v_n + c = -\frac{p^{n+1}}{1+p} + \frac{p^2}{1+p} = \frac{p}{1+p}\left(p + (-p)^n\right)$$

et si n est pair,

$$a_n = v_n + c = \frac{p^{n+1}}{1+p} + \frac{p^2}{1+p} = \frac{p}{1+p}\left(p + (-p)^n\right).$$

II.2.2.1. Y_n suit la loi de Bernoulli de paramètre a_n.

II.2.2.2. Z_n renvoie le nombre d'apparitions de double PILE sur une série de n lancers. L'espérance de Z_n est $E(Z_n) = E(Y_1) + ... + E(Y_n) = a_1 + ... + a_n$, d'où :

$$\begin{aligned} E(Z_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{p}{1+p}\left(p + (-p)^n\right) \\ &= \frac{np^2}{1+p} + \frac{p}{1+p}\sum_{k=1}^{n}(-p)^n \\ &= \frac{np^2}{1+p} + \frac{p}{1+p}(-p)\frac{1-(-p)^n}{1-(-p)} \end{aligned}$$

ou encore :

$$E(Z_n) = \frac{np^2}{1+p} - \frac{p^2\left(1-(-p)^n\right)}{(1+p)^2}.$$

En notant $m_n = E(Z_n)$,

$$\frac{m_n}{n} = \frac{p^2}{1+p} - \frac{p^2}{(1+p)^2}\left(\frac{1}{n} - \frac{(-p)^n}{n}\right).$$

Comme $-p \in]-1, 0[$, $\lim(-p)^n = 0$ et a fortiori $\lim(-p)^n/n = 0$. On a bien sûr $\lim(1/n) = 0$, et l'égalité précédente donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{m_n}{n} = \frac{p^2}{1+p}.$$

II.3.1.1. On a :

$$\begin{cases} b_2 = \mathrm{p}(A_n) = p^2 \\ b_3 = \mathrm{p}(A_3) = \mathrm{p}(A_3 \cap P_2 \cap F_1) = p^2 q \\ b_4 = \mathrm{p}(A_4) = p^3 q + p^2 q^2 = p^2 q \end{cases}$$

comme on le trouve en utilisant l'arbre de la FIG. 3.1. Voyons par exemple comment calculer b_4. On regarde les branches de la FIG. 3.1 qui aboutissent sur un "DP" qui soit le premier à apparaître sur cette branche. On trouve seulement deux branches qui sont solution : la branche $PFPP$ et la branche $FFPP$, donc $\mathrm{p}(A_4) = \mathrm{p}\,(PFPP) + \mathrm{p}\,(FFPP) = p^3q + p^2q^2$.

II.3.1.2. Si l'on a obtenu FACE au premier lancer, la probabilité d'obtenir pour la première fois un double PILE au rang $n+2$ est égale à la probabilité d'obtenir pour la première fois un double PILE au rang $n+1$ (puisque le premier lancer n'interfère pas sur les suivants et que tout se passe comme si l'on avait effectué $n+1$ lancers au lieu des $n+2$ annoncés). Ainsi :

$$\mathrm{p}_{F_1}(B_{n+2}) = \mathrm{p}(B_{n+1}) = b_{n+1}.$$

Si l'on a obtenu PILE au premier lancer, la seule façon d'obtenir un double PILE au rang $n+2$ est d'avoir une séquence du type $PFX_1X_2...X_{n-3}FPP$ où la séquence $X_1X_2...X_{n-3}$ ne contient pas de chaîne PP. La probabilité $\mathrm{p}_{P_1}(B_{n+2})$ d'avoir B_{n+2} sachant P_1 est donc égale à la probabilité d'avoir une séquence de $n+1$ lancers de la forme $FX_1X_2...X_{n-3}FPP$. Cette probabilité est le produit de $\mathrm{p}\,(F_1)$ (probabilité d'avoir F au premier lancer) et $\mathrm{p}(B_n)$ (probabilité de l'événement B_n correspondant à l'apparition d'un double PILE au n-ième lancer : on s'intéresse ici aux séquences $X_1X_2...X_{n-3}FPP$). Par conséquent :

$$\mathrm{p}_{P_1}(B_{n+2}) = \mathrm{p}(B_n) \times \mathrm{p}\,(F_1) = b_nq.$$

II.3.1.3. F_1 et P_1 forment un système complet d'événements. On peut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} b_{n+2} = \mathrm{p}(B_{n+2}) &= \mathrm{p}(B_{n+2} \cap F_1) + \mathrm{p}(B_{n+2} \cap P_1) \\ &= \mathrm{p}_{F_1}(B_{n+2})\,\mathrm{p}(F_1) + \mathrm{p}_{P_1}(B_{n+2})\,\mathrm{p}(P_1) \\ &= qb_{n+1} + pqb_n. \end{aligned}$$

II.3.2.1. Si $p = q = 1/2$,

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right).$$

La formule du II.3.1.3 s'écrit $b_{n+2} = \dfrac{1}{2}b_{n+1} + \dfrac{1}{4}b_n$.

II.3.2.2. On a :

$$\begin{aligned} x_{n+2} = x_{n+1} + x_n &\Leftrightarrow 2^{n+2}b_{n+2} = 2^{n+1}b_{n+1} + 2^nb_n \\ &\Leftrightarrow b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{4}b_n \end{aligned}$$

et la dernière égalité a été démontrée dans la questions précédente. On a donc $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Fibonacci.

II.3.2.3. Comme $(b_1, b_2) = (0, 1/4)$, $(x_1, x_2) = (0, 1)$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est celle qui a été étudiée à la question P.3.2. Ainsi :

$$b_n = \frac{u_n}{2^n} = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left(\phi^{n-1} - \psi^{n-1}\right).$$

II.3.3.1. Si $p = 2/3$, alors $q = 1/3$ et II.3.1.1 donne :

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = \left(0, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \frac{4}{27}\right).$$

II.3.3.2.1. Pour tout n,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ qb_{n+1} + pqb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ pq & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = AU_n$$

en choisissant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/9 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

II.3.3.2.2. Un raisonnement par récurrence montre que $U_n = A^{n-1}U_1$. La formule est évidente si $n = 1$, et si elle est vraie au rang n,

$$U_{n+1} = AU_n = A(A^{n-1}U_1) = A^n U_1$$

donc elle est vraie au rang $n + 1$.

II.3.3.2.3. La matrice P est inversible d'inverse :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,{}^t\!\operatorname{com} A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice $Q = P^{-1}$ vérifie bien évidemment $PQ = QP = I$.

Remarque — On peut aussi ne pas faire appel au cours et chercher directement une matrice $Q = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telle que :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

On a :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ -3a + c = 0 \\ 3b + 2d = 0 \\ -3b + d = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a = 1 \\ c = 3a \\ 9b + 2 = 0 \\ d = 1 + 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/9 \\ c = 1/3 \\ b = -2/9 \\ d = 1/3 \end{cases}$$

d'où :

$$Q = \begin{pmatrix} 1/9 & 1/3 \\ -2/9 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Il ne faut alors pas oublier de dire qu'il est facile de voir que Q vérifie aussi l'égalité $PQ = I$ (autrement dit que Q est aussi un inverse à droite de P).

II.3.3.2.4.

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/9 & 1/3 \end{pmatrix} P \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2/3 & 2 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Un récurrence évidente montre alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad D^n = \begin{pmatrix} (2/3)^n & 0 \\ 0 & (-1/3)^n \end{pmatrix}.$$

II.3.3.2.5. Par suite :

$$\begin{aligned} A^n = (PDP^{-1})^n &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PDP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)...(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^nP^{-1}. \end{aligned}$$

Remarque — Cette réponse convient normalement pour l'écrit. A l'oral, un examinateur peut très bien demander de justifier rigoureusement ce que l'on vient d'affirmer, étant donné que mettre des points de suspension permet de bien imaginer ce qui se passe, mais sans être rigoureux. La seule réponse à donner est que l'on peut démontrer ce résultat par récurrence sur n. C'est facile : la propriété est vraie au rang $n = 1$ puisque $A = PDP^{-1}$, et si elle est vraie au rang n,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

II.3.3.2.6. Ce qui précède montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = A^{n-1}U_1 = PD^{n-1}P^{-1}U_1$$

soit :

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = PD^{n-1}P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 4/9 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned} PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2/3)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1/3)^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} & -3\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} & \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} & \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} \\ \frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{2}{9}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} & \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de sorte que :

$$b_n = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

II.3.3.3.1. $\overline{C}_n$ est l'événement « il y a au moins une apparition d'un double PILE au cours des n premiers lancers », donc $\overline{C}_n = B_1 \cup ... \cup B_n$. Cette réunion est disjointe puisque un double PILE ne peut pas apparaître pour la première fois en deux endroits différents. La formule des probabilités totales donne :

$$\mathrm{p}(\overline{C}_n) = \mathrm{p}(B_1) + ... + \mathrm{p}(B_n) = b_1 + ... + b_n$$

donc :

$$c_n = \mathrm{p}(C_n) = 1 - \mathrm{p}(\overline{C}_n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

En utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b_k &= \frac{4}{9}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{4}{9}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{4}{9} \times \frac{1-(2/3)^n}{1-2/3} - \frac{4}{9} \times \frac{1-(-1/3)^n}{1-(-1/3)} \\ &= \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Finalement :

$$c_n = 1 - \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

II.3.3.3.2. Comme $\lim (2/3)^n = \lim (-1/3)^n = 0$, on obtient :

$$\lim c_n = 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 0.$$

Cela semble bien normal puisque l'on imagine qu'un double PILE finira par apparaître si on lance la pièce un grand nombre de fois.

II.3.4.1. T prend ses valeurs dans $\{2, 3, ..., n, ...\}$ et $\mathrm{p}(T = n) = b_n$.

II.3.4.2.1. On a $(1 - x)(1 + x + ... + x^n) = 1 - x^{n+1}$ quel que soit x différent de 1, donc :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

En dérivant les deux membres de cette égalité en un point $x \neq 1$:

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1 + (x-1)nx^n - x^n}{(1-x)^2}.$$

II.3.4.2.2. On a :

$$\ln|nx^n| = \ln n + n \ln|x| = n\left(\frac{\ln n}{n} + \ln|x|\right).$$

Par hypothèse $|x| < 1$, donc $\ln|x| < 0$. Comme $\lim((\ln n)/n) = 0$, on déduit $\lim \ln|nx^n| = -\infty$. Par composition de limites, on aura donc :

$$\lim_{n\to+\infty} |nx^n| = \lim_{n\to+\infty} \exp(\ln|nx^n|) = \lim_{X\to-\infty} \exp(X) = 0,$$

donc aussi $\lim_{n\to+\infty}(nx^n) = 0$.

II.3.4.2.3. On a vu que :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{(x-1)}{(1-x)^2}nx^n - \frac{x^n}{(1-x)^2}.$$

Si $|x| < 1$, $\lim_{n\to+\infty}(nx^n) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

II.3.4.3.1. On a :

$$E(T) = \sum_{k=2}^{+\infty} k\,\mathrm{p}(T = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kb_k.$$

puisque $b_1 = 0$. Si $p = 2/3$, on a d'après (II.3.3.2.6) :

$$E(T) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4k}{9} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} \right].$$

Pour tout n,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{9} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} \right] = A_n - B_n$$

avec :

$$A_n = \frac{4}{9} \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \quad \text{et} \quad B_n = \frac{4}{9} \sum_{k=1}^{n} k \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

D'après (II.3.4.2.3) :

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{4}{9} \frac{1}{(1-2/3)^2} = 4 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} B_n = \frac{4}{9} \frac{1}{(1-(-1/3))^2} = \frac{1}{4}$$

donc :

$$E(T) = \lim_{n\to+\infty} (A_n + B_n) = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

Le rang moyen d'apparition du premier double PILE est donc $3,75$. En moyenne on peut donc s'attendre à obtenir deux PILE consécutifs au bout d'environ 4 lancers.

II.3.4.3.2. Si $p = 1/2$, on a d'après (II.3.2.3) :

$$b_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}} \left(\phi^{n-1} - \psi^{n-1}\right),$$

donc :

$$E(T) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} \left(\phi^{k-1} - \psi^{k-1}\right).$$

Pour tout n,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} \left(\phi^{k-1} - \psi^{k-1}\right) = C_n - D_n$$

avec ;

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{\phi}{2}\right)^{k-1} \quad \text{et} \quad D_n = \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{\psi}{2}\right)^{k-1}.$$

On a $\phi/2 \simeq 0,809$ et $\psi/2 \simeq -0.309$, donc on peut appliquer (II.3.4.2.3) :

$$\lim_{n\to+\infty} C_n = \frac{1}{(1-\phi/2)^2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} D_n = \frac{1}{(1-\psi/2)^2}.$$

On obtient alors :

$$E(T) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1}{(1-\phi/2)^2} - \frac{1}{(1-\psi/2)^2} \right).$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\phi/2)^2} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{16}{14-6\sqrt{5}} \\ &= \frac{8}{7-3\sqrt{5}} = \frac{56+24\sqrt{5}}{4} = 14+6\sqrt{5}. \end{aligned}$$

De la même façon, on obtiendrait :

$$\frac{1}{(1-\psi/2)^2} = 14 - 6\sqrt{5}$$

d'où :

$$E(T) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \times 12\sqrt{5} = 6.$$

II.3.4.4. On a démontré que le rang moyen d'apparition du premier double PILE était $3,75$ lorsque $p = 2/3$, et 6 lorsque $p = 1/2$. Il est tout à fait normal que l'on attende, en moyenne, plus longtemps avant d'obtenir un double PILE lorsque la probabilité de tirer PILE à chaque lancer est plus faible.

Bibliographie

[1] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Leçons rédigées et commentées, Vol. II, Publibook, 2006.

[2] D.-J. Mercier, Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation, Publibook, 2008.

[3] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Leçons rédigées et commentées, Vol. IV, Publibook, 2008.

Autres publications de Dany-Jack Mercier :
Aux Editions Publibook[1] :

01. Acquisition des fondamentaux pour les concours IV : Géo. affine et euclidienne.
02. Annales 2005 (avec J.-E. Rombaldi).
03. Annales 2006 (avec J.-E. Rombaldi).
04. Annales 2009 (avec J.-E. Rombaldi).
05. Annales 2010 (avec J.-E. Rombaldi).
06. Annales 2011 (avec J.-E. Rombaldi).
07. Annales du CAPES interne 2002 à 2008.
08. Annales du CAPES externe 1999 à 2005 (avec J.-E. Rombaldi).
09. Annales du CAPES externe 2006 à 2008 (avec J.-E. Rombaldi).
10. Annales du CAPES externe 2009 à 2011 (avec J.-E. Rombaldi).
11. Annales de l'agrégation interne de 2005 à 2007 (avec J.-E. Rombaldi).
12. Annales de l'agrégation interne de 2008 à 2010 (avec J.-E. Rombaldi).
13. Cahiers de Mathématiques du Supérieur, Vol. I.
14. Cours de Géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation.
15. Ex. pour le CAPES math. et l'agrég. int. - Algèbre, arith. et géométrie, Vol. I.
16. Ex. pour le CAPES math. et l'agrég. int. - Algèbre, arith. et géométrie, Vol. II.
17. Fonctions de plusieurs variables réelles, ex.& prob. (avec O. Nakoulima).
18. Fondamentaux d'algèbre & d'arithmétique.
19. Fondamentaux de géométrie.
20. L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Vol. I.
21. L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Vol. II.
22. L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Vol. III.
23. L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Vol. IV.
24. Lectures sur les Mathématiques, l'Enseignement & les Concours, Vol. 1.
25. Lectures sur les Mathématiques, l'Enseignement & les Concours, Vol. 2.
26. Lectures sur les Mathématiques, l'Enseignement & les Concours, Vol. 3.
27. Questions du jury d'oral du CAPES math. & réfl. sur la prépa. (avec F. Herbaut).
28. Recueil d'exercices et de problèmes d'algèbre, d'arithmétique et de géométrie.

Chez Lulu.com[2] :

01. OBJECTIF CAPES Maths, Master, TD 2010-11 Alg. Géo. Arith. - Sem. 1.
02. Propositions de plans pour des leçons d'oral du CAPES math., Vol. I.
03. TD 2009-10 : 100h de prépa. au CAPES ext. en alg., géo. & arith.
04. Oral 1 du CAPES externe - Courbes de Bézier.

Site internet Megamaths : http://megamaths.perso.neuf.fr/

[1] http ://www.publibook.com/boutique2006/auteur-universitaire.php ?auteur=9541
[2] http ://stores.lulu.com/megamaths